

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

I. razred

1. Kružnice k_1 i k_2 polumjera $r_1 = 6$ i $r_2 = 3$ dodiruju se izvana. Obje kružnice dodiruju iznutra kružnicu k polumjera $r = 9$. Zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2 siječe kružnicu k u točkama P i Q . Izračunajte duljinu tetive $\overline{PQ}$.
2. Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

3. Dokažite da je za svaki $a \in (1, 2)$ površina lika kojeg omeđuju grafovi funkcija

$$y = 1 - |x - 1| \quad \text{ i } \quad y = |2x - a|,$$

manja od $\frac{1}{3}$.

4. Dana je trojka $(a_1, a_2, a_3) = (3, 4, 12)$. Provodimo sljedeći postupak: biramo dva broja a_i i a_j , ($i \neq j$), te ih zamijenimo sa $0.6a_i - 0.8a_j$ i $0.8a_i + 0.6a_j$. Može li se višekratnom primjenom gore opisanog postupka dobiti trojka $(2, 8, 10)$?

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

II. razred

1. Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta iz vrha C trokuta ABC sijeku pravac AB . Ako je $|CL| = |CM|$, dokažite da je $|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2$, gdje je R duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABC .

2. U zavisnosti o parametru a nađite rješenja jednadžbe

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

Za koje realne brojeve a su sva rješenja realna?

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite nejednakost

$$a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \leq 1.$$

4. Na jednom turniru sudjelovalo je n košarkaških ekipa. Svaka ekipa odigrala je sa svakom drugom točno jednu utakmicu. Neriješenih ishoda nije bilo. Ako na kraju turnira i -ta ekipa ima x_i pobjeda i y_i poraza ($i = 1, 2, \dots, n$), dokažite da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

III. razred

1. Trokut ABC s kutovima α, β, γ upisan je u pravokutnik $APQR$ tako da točka B leži na stranici $\overline{PQ}$, a točka C na stranici $\overline{QR}$. Dokažite da je

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot P(BCQ) = \operatorname{ctg} \beta \cdot P(ACR) + \operatorname{ctg} \gamma \cdot P(ABP).$$

2. Baza piramide $ABCDV$ je pravokutnik $ABCD$ čije su duljine stranica $|AB| = a$ i $|BC| = b$, a svi bočni bridovi su duljine c . Odredite površinu presjeka te piramide ravninom koja prolazi dijagonalom $\overline{BD}$ baze i paralelna je bočnom bridu $\overline{VA}$.
3. Za duljine a, b i c stranica trokuta vrijedi $a \geq b \geq c$. Vrhovi trokuta središta su triju krugova s nenegativnim polumjerima. Nikoja dva kruga nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, niti obuhvaćaju neki od preostala dva vrha trokuta. Kolika je maksimalna površina koju pokrivaju ti krugovi?
4. Možemo li iz svakog deveteročlanog podskupa skupa prirodnih brojeva odabrati četiri različita elementa a, b, c i d , tako da brojevi $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20 ?

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Supetar, 5. – 8. svibnja 1999. godine

IV. razred

1. Polovištem svakog brida tetraedra položena je ravnina okomito na suprotni brid. Dokažite da se svih šest ravnina siječe u točki koja je simetrična središtu opisane sfere tetraedra u odnosu na njegovo težište.
2. Neka je n pozitivan cijeli broj veći od 1. Koliko ima permutacija $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ brojeva $1, 2, \dots, n$ takvih da postoji točno jedan indeks $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ za koji je $a_i > a_{i+1}$?
3. Izračunajte sumu

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_k}{2^k} + \dots$$

gdje je (a_n) niz brojeva definiran na ovaj način:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{za } n > 2.$$

4. U ravnini je dan kvadrat s vrhovima $T_1 = (1, 0)$, $T_2 = (0, 1)$, $T_3 = (-1, 0)$ i $T_4 = (0, -1)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je T_{n+4} polovište dužine $\overline{T_n T_{n+1}}$. Uz pretpostavku da niz točaka T_n ($n \rightarrow \infty$) ima graničnu točku, nađite koordinate te točke.