

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

I. razred

1. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?
2. Sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$ je točka S , dok je točka P polovište stranice $\overline{AB}$. Neka je M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{PD}$, a N sjecište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{PC}$. Četverokutu $PMSN$ upisana je kružnica. Dokažite da je njen polumjer jednak $|MP| - |MS|$.
3. Dokažite da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

4. Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča $9 \times n$ može prekriti pločicama



oblika  tako da se one međusobno ne preklapaju?

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

II. razred

1. Neka je z kompleksan broj različit od nule, koji zadovoljava jednakost $z^8 = \bar{z}$. Koje vrijednosti može poprimiti broj z^{2001} ?
2. Kružnica sa središtem O dira stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC redom u točkama K , P i Q . Dužine $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ sijeku spojnicu $\overline{PQ}$ redom u točkama M i N . Dokažite da je

$$\frac{|QN|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MP|}{|CA|}.$$

3. Neka je N prirodan broj. Dano je N trojki cijelih brojeva r_j , s_j , t_j , za $1 \leq j \leq N$, takvih da je barem jedan od njih neparan. Pokažite da postoje cijeli brojevi a , b , c takvi da je $ar_j + bs_j + ct_j$ neparan, za barem $\frac{4N}{7}$ različitih indeksa j .
4. Neka je P poligon u koordinatnom sustavu u ravnini čija je površina veća od 1. Dokažite da postoje dvije različite točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) poligona P takve da su $x_1 - x_2$ i $y_1 - y_2$ cijeli brojevi.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

III. razred

1. U ravnini su dane dvije različite točke O i P . Odaberimo paralelogram $ABCD$ kojem je točka O središte. Označimo s M i N redom polovišta dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$. Točka Q je presjek dužina $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$. Dokažite da točke O , Q i P leže na istom pravcu i da točka Q ne ovisi o izboru paralelograma $ABCD$.
2. Dan je trokut ABC takav da je $|AC| \neq |BC|$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$, $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\varphi = \sphericalangle ACM$, $\psi = \sphericalangle BCM$. Dokažite da je

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

3. Na ploči su napisani brojevi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2001}$. Učenik odabire dva broja s ploče, recimo x i y , te izračuna broj $x + y + xy$, rezultat zapiše na ploču, a x i y obriše. Odredite broj koji će ostati na ploči nakon što ovaj postupak obavi 2000 puta.
4. Skup S sadrži 100 prirodnih brojeva, od kojih je svaki manji od 200. Pokažite da postoji neprazan podskup T od S takav da je produkt brojeva iz T potpuni kvadrat.

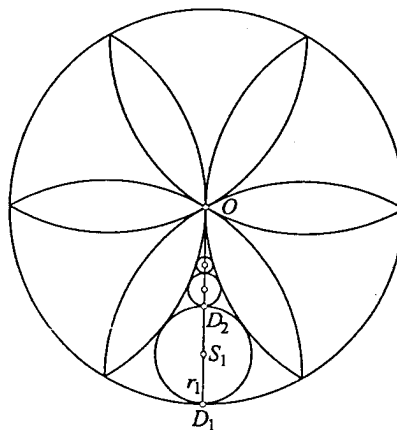
MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

IV. razred

1. Na slici su unutar kružnice sa središtem O i polumjerom 1 nacrtani lukovi još šest kružnica istog polumjera. U području između dvije susjedne "latice" upisan je niz kružnica s polumjerima $r_1, r_2, r_3, \dots$, koje se s početnom kružnicom i susjednim kružnicama u nizu dodiruju redom u točkama $D_1, D_2, D_3, \dots$. Za svaki n izračunajte polumjer r_n i duljinu $d_n = |OD_n|$.



2. Papir oblika kvadrata s vrhovima F, B, H i D ima stranicu duljine a . Na njegovim stranicama $\overline{FB}$ i $\overline{BH}$, označene su točke G i A , odnosno E i C , takve da je $|FG| = |GA| = |AB|$ i $|BE| = |EC| = |CH|$. Papir je presaviniut po dužinama $\overline{DG}, \overline{DA}, \overline{DC}$ i $\overline{AC}$ tako da se točka G poklopi s B , a točke F i H s točkom E . Odredite volumen tako nastale trostrane piramide $ABCD$.
3. Dan je broj $n = p_1 p_2 p_3 p_4$, gdje su p_1, p_2, p_3 i p_4 četiri različita prosta broja. Njegovi pozitivni cjelobrojni djelitelji su

$$d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \dots < d_{15} < d_{16} = n.$$

Postoji li $n < 2001$, takav da je $d_9 - d_8 = 22$?

4. Tablica idmenzija $n \times n$ ispunjena je jedinicama i nulama. Poznato je da ne postoje četiri jedinice na mjestima koje čine pravokutnik. Dokažite da je broj jedinica u tablici najviše $\frac{n}{2} (1 + \sqrt{4n - 3})$.