HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 13. travnja 2013.

Zadatak 1.

Za prirodni broj $n \geqslant 2$, neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi različiti od nule takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Dokaži da postoje različiti prirodni brojevi i i j $(i, j \leqslant n)$ takvi da je

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{x_i}{x_j}\right| \leqslant 2.$$

Rješenje.

Ukoliko se među danim brojevima nalaze dva jednaka, možemo izabrati ta dva. Pretpostavimo da su svi brojevi različiti i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Kako je suma svih brojeva jednaka nuli postoji indeks k $(1 < k < n)$ takav da je $x_k > 0 > x_{k+1}$. Vrijedi da je:

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| = |x_{k+1}| + |x_{k+2}| + \cdots + |x_n|.$$

Pretpostavimo da ne postoji i i j s traženim svojstvom. Za $i = 1, 2, \ldots, k-1$ vrijedi:

$$\frac{|x_i|}{|x_{i+1}|} > 1 > \frac{1}{2},$$

što znači da mora vrijediti:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} > 2.$$

Tada vrijedi:

$$x_i < \frac{1}{2}x_{i-1} < \frac{1}{2^2}x_{i-2} < \ldots < \frac{1}{2^i}x_1, \text{ za } i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Na sličan način se za negativne brojeve dokaže:

$$|x_j| < \frac{1}{2^{n-j}}|x_n|, \text{ za } j = k, k+1, \ldots, n.$$

Konačno, imamo

$$|x_1| < |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k| = |x_{k+1}|+|x_{k+2}|+\cdots+|x_n| < |x_n|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) < 2|x_n|.$$

Na isti način, s druge strane:

$$|x_n| < |x_k| + |x_{k+1}| + \cdots + |x_n| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < |x_1|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) < 2|x_1|.$$

Stoga je

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{x_1}{x_n}\right| \leqslant 2.$$

Zadatak 2.

Na kružnicu stavljamo crvene i plave kuglice. Na početku se na kružnici nalaze samo dvije crvene kuglice. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

i) dodati jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica (crvenu u plavu i obratno);

ii) maknuti jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica.

Možemo li nizom takvih poteza postići da na kružnici bude

a) 2013 crvenih i 2013 plavih kuglica;

b) samo dvije plave kuglice?

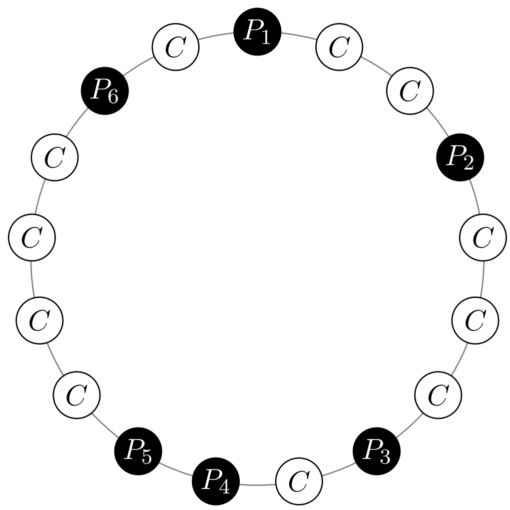
Rješenje.

a) Prilikom dodavanja nove crvene kuglice razlikujemo tri slučaja u ovisnosti o tome kojih boja su njeni susjedi.

Ako kuglicu dodajemo između dvije plave kuglice, tada imamo slučaj $PP \longrightarrow CCC$ u kojem se broj plavih kuglica smanji za dva. U slučaju da novu crvenu kuglicu dodajemo između dvije crvene kuglice imamo $CC \longrightarrow PCP$ i broj plavih kuglica se poveća za dva. U trećem slučaju, kada crvenu kuglicu dodajemo između jedne plave i jedne crvene kuglice ($CP \longrightarrow PCC$) broj plavih kuglica se ne mijenja. Zaključujemo da se jednim potezom dodavanja kuglice parnost broja plavih kuglica ne mijenja. Micanje crvene kuglice također ne mijenja parnost broja plavih kuglica jer svaki potez micanja kuglica inverzni potez jednog od navedenih poteza dodavanja.

Na početku je broj plavih kuglica nula pa će nakon svakog koraka broj plavih kuglica biti paran. Stoga nije moguće postići da nakon određenog broja koraka na kružnici bude točno 2013 plavih kuglica.

b) U danom rasporedu kuglica, označimo plave kuglice redom s $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$ u smjeru kazaljke na satu, počevši od proizvoljne plave kuglice. Neka je m_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$) broj crvenih kuglica koje se nalaze između kuglica P_i i P_{i+1} ($P_{n+1} = P_1$). Za primjer na slici imamo $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 1$, $m_4 = 0$, $m_5 = 4$, $m_6 = 1$.



Nadalje, označimo $S = m_1 - m_2 + m_3 - \cdots + m_{2k-1} - m_{2k}$. Ukoliko dani raspored ima n crvenih kuglica i nijednu plavu kuglicu, označimo $S = n$. Dokažimo da nijedan dozvoljeni potez neće promijeniti ostatak pri dijeljenju broja S s tri. Opet razlikujemo tri slučaja:

1. Crvenu kuglicu dodajemo između plavih kuglica P_i i P_{i+1}:

$$P_{i-1}\underbrace{\ldots}_{m_{i-1}}P_i\underbrace{\quad}_{m_i=0}P_{i+1}\underbrace{\ldots}_{m_{i+1}}P_{i+1} \quad\longrightarrow\quad P'_{i-1}\underbrace{\ldots C\overset{\downarrow}{C}C\ldots}_{m'_i}P'_i.$$

   Prije poteza imamo $S = S_0 + m_{i-1} - m_i + m_{i+1} = S_0 + m_{i-1} + m_{i+1}$, a poslije poteza $S' = S_0 + m'_i = S_0 + (m_{i-1} + m_{i+1} + 3) = S + 3$.

2. Crvenu kuglicu dodajemo između dvije crvene kuglice:

$$P_i\underbrace{\ldots CC\ldots}_{m_i}P_{i+1} \quad\longrightarrow\quad P_i\underbrace{\ldots}_{m'_i}P_{i+1}\underbrace{\overset{\downarrow}{C}}_{m'_{i+1}=1}P_{i+1}\underbrace{\ldots}_{m'_{i+2}}P_{i+3}.$$

   Slično kao prije, $S = S_0 + m_i$, a $S' = S_0 + m'_i - 1 + m_{i+2}$. Međutim, vrijedi da je $m_i = m'_i + m'_{i+2} + 2$ pa je $S' = S - 3$.
   (Analogno se pokaže u slučaju da crvenu kuglicu dodajemo između dvije crvene kuglice, a da plavih kuglica na kružnici uopće nema.)

3. Crvenu kuglicu dodajemo između plave i crvene kuglice (desno od plave kuglice P_i):

$$P_{i-1}\underbrace{\quad}_{m_{i-1}}P_i\underbrace{C\ldots}_{m_i}P_{i+1} \quad\longrightarrow\quad P_{i-1}\underbrace{\ldots C\overset{\downarrow}{C}}_{m'_{i-1}}P_i\underbrace{\ldots}_{m'_i}P_i$$

   U ovom slučaju je $S = S_0 + m_{i-1} - m_i$, a $S' = S_0 + m'_{i-1} - m'_i$. Kako je $m'_{i-1} = m_{i-1} + 2$, a $m'_i = m_i - 1$, dobijemo da je $S' = S + 3$.

Dakle, u svakom slučaju se S smanji ili poveća za tri pa se ostatak pri dijeljenju broja S s tri ne mijenja. Na početku (kada se na kružnici nalaze samo dvije crvene kuglice) taj ostatak iznosi 2. Kada bismo postigli da se na kružnici nalaze samo dvije plave kuglice, taj ostatak bi iznosio nula, a to nije moguće.

Zadatak 3.

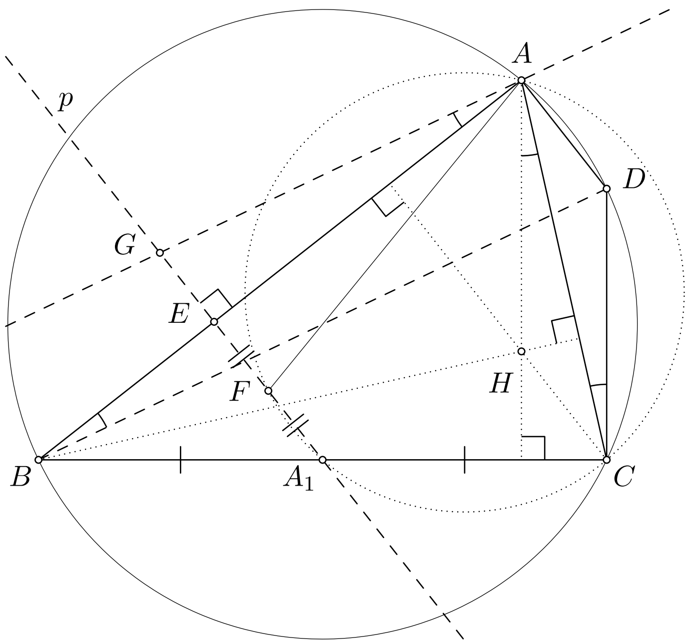
Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H. Neka je D točka takva da je četverokut $AHCD$ paralelogram. Neka je p okomica na pravac AB kroz polovište A_1 stranice $\overline{BC}$. Označimo sjecište pravaca p i AB s E, a polovište dužine $\overline{A_1E}$ s F. Točku u kojoj paralela s pravcem BD kroz točku A siječe p označimo s G. Dokaži da je četverokut AFA_1C tetivan ako i samo ako pravac BF prolazi polovištem dužine $\overline{CG}$.

Rješenje.

Kako je $AHCD$ paralelogram, vrijedi $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CHA = 180° - \beta$, što znači da D leži na opisanoj kružnici trokuta ABC. Također, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle HAC = 90° - \gamma$.

Zbog tetivnosti četverokuta $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, a zbog paralelnosti pravaca AG i BD vrijedi $\sphericalangle GAB = \sphericalangle ABD$.

Dakle, $\sphericalangle BAG = 90° - \gamma$.



Tetivnost četverokuta AFA_1C ekvivalentna je s uvjetom $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ACA_1$, tj. $\sphericalangle AFE = \gamma$. To je dalje ekvivalento s $\sphericalangle FAE = 90° - \gamma$.

Kako je $\sphericalangle GAE = 90° - \gamma$, gornji uvjet vrijedi ako i samo ako su trokuti AEF i AEG sukladni, a to je dalje ekvivalentno s $|EG| = |EF|$.

Kako je F polovište dužine $\overline{A_1E}$, dani uvjet vrijedi ako i samo ako točka F dijeli dužinu $\overline{GA_1}$ u omjeru $2:1$, tj. ako vrijedi $|FG| = 2|FA_1|$. Kako je $\overline{GA_1}$ težišnica trokuta BCG, ovo vrijedi ako i samo ako je F težište tog trokuta.

No, to je ekvivalentno s uvjetom da BF prolazi polovištem dužine $\overline{CG}$.

Zadatak 4.

Nađi sve prirodne brojeve a i b takve da

$$\left(a^2+b\right) \mid \left(a^2b+a\right) \quad \text{i} \quad \left(b^2-a\right) \mid \left(ab^2+b\right).$$

Rješenje.

Iz činjenice da $(a^2+b) \mid (a^2b+a)$ zaključujemo da je

$$\frac{a^2b+a}{a^2+b} = \frac{b(a^2+b)+a-b^2}{a^2+b} = b - \frac{b^2-a}{a^2+b}$$

cijeli broj.

Stoga zaključujemo da je $a^2+b \leqslant b^2-a$ ili $b^2-a \leqslant 0$. U ovom drugom slučaju bi vrijedilo da je $a < a^2+b \leqslant a-b^2 < a$, što očito nije moguće. Dakle, $a^2+b \leqslant b^2-a$.

Na sličan način, iz činjenice da $(b^2-a) \mid (ab^2+b)$ zaključujemo da ovo također mora biti cijeli broj:

$$\frac{ab^2+b}{b^2-a} = \frac{a(b^2-a)+a^2+b}{b^2-a} = a + \frac{a^2+b}{b^2-a}.$$

Iz ovoga slijedi da je $b^2-a \leqslant a^2+b$ pa je $b^2-a = a^2+b$. Prethodna jednakost se može zapisati kao $(b+a)(b-a) = a+b$, odakle dijeljenjem s $a+b$ dobijemo da je $b = a+1$. Izravnim uvrštavanjem se lako provjeri da svi brojevi ovog oblika zadovoljavaju uvjete zadatka. Stoga su sva rješenja $(n, n+1)$ za $n \in \mathbb{N}$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 14. travnja 2013.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(1) \geqslant 0$ i da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x) - f(y) \geqslant (x - y)f(x - y).$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $y \to x - 1$ u danu nejednadžbu dobijemo:

$$f(x) - f(x-1) \geqslant 1 \cdot f(1) \geqslant 0,$$

odnosno

$$f(x) \geqslant f(x-1), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Uvrštavanjem $y \to 0$ u danu nejednadžbu dobijemo:

$$f(x) - f(0) \geqslant xf(x), \tag{2}$$

a uvrštavanjem $x \to 0$, $y \to x$ dobijemo:

$$f(0) - f(x) \geqslant -xf(-x). \tag{3}$$

Zbrajanjem (2) i (3) dobijemo:

$$0 \geqslant xf(x) - xf(-x),$$

odnosno, ako uzmemo $x > 0$

$$f(-x) \geqslant f(x), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Uvrstimo li $x \to 1$, $y \to 0$ u danu nejednadžbu, dobijemo:

$$f(1) - f(0) \geqslant f(0),$$

odnosno

$$f(0) \leqslant 0. \tag{5}$$

Sada zaključujemo:

$$0 \overset{(5)}{\geqslant} f(0) \overset{(1)}{\geqslant} f(-1) \overset{(4)}{\geqslant} f(1) \geqslant 0,$$

pa vrijedi $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

Uzastopnim korištenjem nejednakosti (1) dobivamo:

$$f(x) \geqslant f(x-1) \geqslant f(x-2) \geqslant \dots,$$

pa zaključujemo da vrijedi:

$$f(x) \geqslant f(x-k), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Uvrštavanjem $x \to x-1$, $y \to -1$ u danu nejednadžbu dobijemo:

$$f(x-1) - f(-1) \geqslant xf(x),$$

odnosno

$$f(x-1) \geqslant xf(x), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Iz nejednakosti (1) i (7) zaključujemo:

$$f(x) \geqslant xf(x),$$

odnosno

$$f(x)(x-1) \leqslant 0.$$

Iz prethodne nejednakosti slijedi da je

$$f(x) \leqslant 0, \quad \text{za svaki } x > 1 \quad \text{i} \quad f(x) \geqslant 0, \quad \text{za svaki } x < 1. \tag{8}$$

Pretpostavimo sada da je $x > 1$. Tada postoji $y < 1$ takav da je $k = x - y \in \mathbb{N}$. Stoga vrijedi:

$$0 \overset{(8)}{\geqslant} f(x) \overset{(6)}{\geqslant} f(x-k) = f(y) \overset{(8)}{\geqslant} 0$$

pa zaključujemo da je $f(x) = 0$ za sve $x > 1$. Na sličan način, ako je $x < 1$ onda postoji $y > 1$ takav da je $k = y - x \in \mathbb{N}$ pa vrijedi:

$$0 \overset{(8)}{\geqslant} f(y) \overset{(6)}{\geqslant} f(y-k) = f(x) \overset{(8)}{\geqslant} 0$$

te je opet $f(x) = 0$. Stoga zaključujemo da je jedini kandidat za rješenje funkcija $f(x) = 0$, a lako se provjeri da ta funkcija zaista zadovoljava uvjete zadatka.

Zadatak 2.

Neka su m, n i k prirodni brojevi i neka su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ brojevi $1, 2, \ldots, n$ u nekom poretku. Ako za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi

$$k \mid (m + p_i - i),$$

dokaži da je barem jedan od brojeva m i n višekratnik broja k.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da k ne dijeli n i da je $n = kq + r$, $0 < r < k$.

Budući da je u zadatku jedino važan ostatak broja m pri dijeljenju s k, možemo pretpostaviti da je $0 < m \leqslant k$. Dokazat ćemo da je $m = k$.

Ako pretpostavimo da je $m \leqslant r$, onda imamo brojeve $p_m, p_{m+k}, \ldots, p_{m+kq}$ koji bi zbog uvjeta zadatka morali biti jednaki brojevima $k, 2k, \ldots, qk$ u nekom poretku. To je nemoguće jer u prvom nizu ima $q+1$ brojeva, a u drugom samo q.

Dakle $m > r$ i $m+1+qk > n$. Imamo brojeve $1, k+1, ..., qk+1$ kojih ima $q+1$ i oni odgovaraju brojevima $p_{m+1-k}, p_{m+1}, p_{m+1+k}, \ldots, p_{m+1+(q-1)k}$. Zato mora vrijediti $m+1-k \geqslant 1$, tj. $m \geqslant k$. Zbog pretpostavke $m \leqslant k$ slijedi $m = k$.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da $k \nmid m$ te dokažimo da onda $k \mid n$.

Uvjet zadatka kaže

$$k \mid (m + p(i) - i), \tag{9}$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, pa dijeli i njihov zbroj

$$k \mid \sum_{i=1}^{n}(m + p(i) - i) = mn + \sum_{i=1}^{n} p(i) - \sum_{i=1}^{n} i = mn,$$

gdje smo koristili činjenicu da je p permutacija tako da su dvije sume zapravo jednake. Sada ako su k i m relativno prosti, onda smo gotovi jer iz $k \mid mn$ slijedi $k \mid n$, što smo i htjeli dokazati.

Preostaje dokazati tvrdnju u slučaju da je $d = \text{N.Z.D.}(k, m) > 1$. Tada, iz uvjeta zadatka (9), slijedi da

$$d \mid (p(i) - i) \tag{10}$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Promotrimo sada odvojeno dvije restrikcije od p. Neka je

$$X = \left\{d, 2d, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d\right\}.$$

Dakle, X se sastoji od pozitivnih višekratnika broja d ne većih od n. Svojstvo (10) pokazuje da ako je i djeljiv s d, onda mora biti i $p(i)$ djeljiv s d. To zapravo znači da p preslikava X u X, odnosno restrikcija od p na X je permutacija od X. Budući da za svaki $i \in X$ vrijedi da d dijeli k i sve pribrojnike desne strane u (9), zaključujemo da

$$\frac{k}{d} \mid \frac{m + p(i) - i}{d}$$

za svaki $i \in X$. Tada k/d dijeli i njihov zbroj

$$\frac{k}{d} \mid \sum_{i \in X} \frac{m + p(i) - i}{d} = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \frac{m}{d} + \frac{1}{d}\left(\sum_{i \in X} p(i) - \sum_{i \in X} i\right) = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \frac{m}{d},$$

gdje smo koristili činjenicu da je p permutacija od X tako da su dvije sume u zagradi jednake. Ali k/d i m/d jesu relativno prosti pa

$$\frac{k}{d} \mid \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor. \tag{11}$$

Slično, promotrimo skup

$$Y = \left\{1, d+1, 2d+1, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor d + 1\right\},$$

koji se sastoji od svih brojeva s ostatkom 1 pri dijeljenju s d, a koji nisu veći od n. Opet ako je $i \in Y$, onda zbog (10) mora i $p(i)$ davati ostatak 1. Dakle, restrikcija od p na Y je permutacija od Y. Sada na isti način kao gore (kod skupa X), dobijemo da

$$\frac{k}{d} \mid \left(\left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor + 1\right) \cdot \frac{m}{d},$$

odnosno

$$\frac{k}{d} \mid \left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor + 1. \tag{12}$$

Na kraju iskombiniramo (11) i (12) da zaključimo

$$\left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor,$$

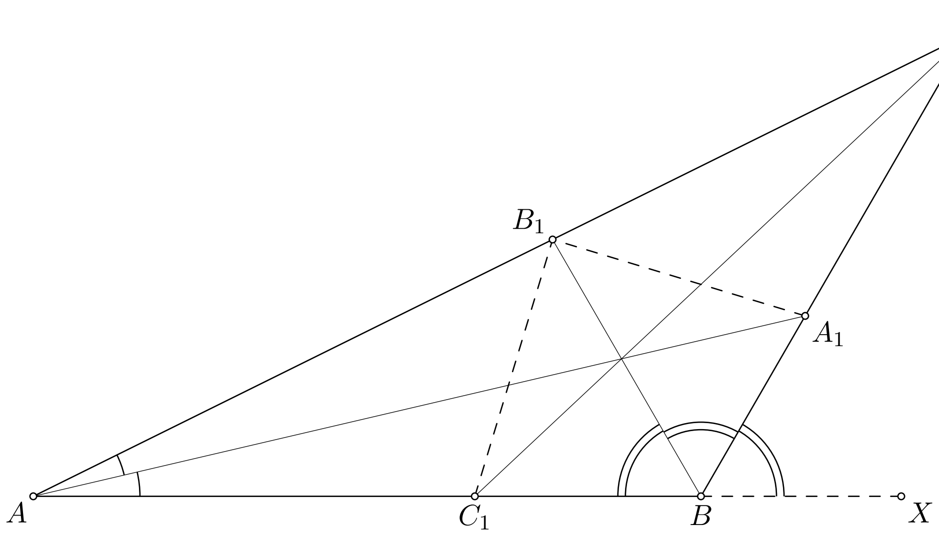
a to je moguće jedino ako $d \mid n$. Ali onda (11) postaje $k/d \mid n/d$, odnosno $k \mid n$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3.

U trokutu ABC kut pri vrhu B iznosi $120°$. Neka su A_1, B_1, C_1 redom točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, takve da su AA_1, BB_1, CC_1 simetrale kutova trokuta ABC. Odredi kut $\sphericalangle A_1B_1C_1$.

Rješenje.

Neka je X bilo koja točka na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B. Uočimo da je $\sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle B_1BC = \sphericalangle CBX = 60°$.



To znači da točka A_1 leži na simetrali kuta $\sphericalangle B_1BX$, a leži i na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$.

Iz toga slijedi da je točka A_1 središte pripisane kružnice trokuta ABB_1 nasuprot vrha A pa leži i na simetrali kuta $\sphericalangle BB_1C$.

Time smo dokazali da je pravac B_1A_1 simetrala kuta $\sphericalangle BB_1C$. Analogno se pokazuje da je pravac B_1C_1 simetrala kuta $\sphericalangle AB_1B$.

Zato vrijedi

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1B + \sphericalangle BB_1C_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle CB_1B + \frac{1}{2}\sphericalangle BB_1A = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Zadatak 4.

Za skup $A \subseteq \mathbb{Z}$ kažemo da je *prihvatljiv* ako za svaka dva (ne nužno različita) broja $x, y \in A$ i za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x^2 + kxy + y^2 \in A$.

Nađi sve parove (m, n) cijelih brojeva različitih od nule za koje je $\mathbb{Z}$ jedini prihvatljivi skup koji sadrži m i n.

($\mathbb{Z}$ je skup svih cijelih brojeva.)

Rješenje.

Označimo $d = M(m, n)$ i primijetimo da $d \mid m^2 + mn + n^2$. Drugim riječima, primjenom danog pravila na dva broja koja su djeljiva brojem d nikada nećemo dobiti broj koji nije djeljiv brojem d, to znači da je skup $\{\ldots, -2d, d, 0, d, 2d, \ldots\} \neq \mathbb{Z}$ prihvatljiv.

Pretpostavimo sada da je $d = 1$, tj. da su m i n relativno prosti. Tada su i brojevi m^2 i n^2 također relativno prosti pa postoje cijeli brojevi a i b takvi da je $am^2 + bn^2 = 1$.

Neka je A neki prihvatljivi skup koji sadrži m i n. Ako je $x \in A$ tada je i broj $x^2 + (t-2) \cdot x \cdot x + x^2 = tx^2 \in A$ za svaki cijeli broj t. Stoga su brojevi am^2 i bn^2 elementi skupa A. Nadalje, ako je $x, y \in A$ tada je broj $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \in A$. Zaključujemo da je $1 = (am^2 + an^2)^2 \in A$.

Sada lako vidimo da je $A = \mathbb{Z}$. Naime, svaki cijeli broj c se može napisati kao $c = 1^2 + (c-2) \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 \in A$.

Prema tome, jedini prihvatljivi skup koji sadrži m i n je skup $\mathbb{Z}$ ako i samo ako su m i n relativno prosti.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 28. travnja 2013.

Zadatak 1.

U ovisnosti o prirodnom broju k, odredi najmanji realni broj D_k takav da je

$$(abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leqslant D_k$$

za sve nenegativne realne brojeve a, b, c, d za koje je $a^k + b^k + c^k + d^k = 4$.

Rješenje.

Četvorka $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ zadovoljava dani uvjet za svaki prirodni broj k, što znači da je $D_k \geqslant 4$ za svaki prirodni broj k. Dokažimo da je $D_k = 4$ za sve $k \geqslant 2$. Ako je $k \geqslant 2$ prema nejednakosti između potencijalnih sredina redova k i 2 vrijedi:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{a^k + b^k + c^k + d^k}{4}} = 1,$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 4.$$

Uvedemo li supstituciju $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $w = d^2$ prethodna nejednakost glasi

$$x + y + z + w \leqslant 4,$$

a tražena nejednakost glasi

$$xyz + xyw + xzw + yzw \leqslant 4. \tag{13}$$

Dovoljno nam je dokazati nejednakost:

$$16(xyz + xyw + xzw + yzw) \leqslant (x + y + z + w)^3.$$

Vrijedi da je

$$(x - y + z - w)^2 \geqslant 0,$$

a to se može ekvivalentno zapisati kao

$$(x + y + z + w)^2 \geqslant 4(xy + yz + zw + wx). \tag{14}$$

Također vrijedi

$$(x + y + z + w)(xy + yz + zw + wx) \geqslant 4(xyz + xyw + xzw + yzw). \tag{15}$$

Naime, ova posljednja nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$(x^2 + z^2)(y + w) + (y^2 + w^2)(x + z) \geqslant 2(xyz + xzw + xyw + yzw)$$

koja vrijedi jer je po A–G nejednakosti

$$x^2 + z^2 \geqslant 2xz \quad \text{i} \quad y^2 + w^2 \geqslant 2yw.$$

Množenjem nejednakosti (14) i (15) dobijemo traženu nejednakost (13).

U slučaju $k = 1$ je $D_k > 4$. Naime, uvrštavanjem četvorke $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ dobijemo $D_1 \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^6 > 4$. Dokažimo da je D_1 upravo jednak tome broju.

Pretpostavimo da za neka četiri realna broja a, b, c, d vrijedi $a+b+c+d = 1$ i $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$. Označimo $a' = a$, $b' = b + \frac{d}{2}$, $c' = c + \frac{d}{2}$, $d' = 0$. Zamjenom $(a, b, c, d) \to (a', b', c', d')$ se izraz na lijevoj strani dane nejednakosti poveća. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
&(a'b'c')^2 + (a'b'd')^2 + (a'c'd')^2 + (b'c'd')^2 \\
&= a^2 \left(b + \frac{d}{2}\right)^2 \left(c + \frac{d}{2}\right)^2 \\
&= a^2 \left(b^2 + bd + \frac{d^2}{4}\right) \left(c^2 + cd + \frac{d^2}{4}\right) \\
&\geqslant a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot b^2 \cdot cd + a^2 \cdot bd \cdot c^2 + a^2 \cdot bd \cdot cd \\
&\geqslant (abc)^2 + (abd)^2 + (acd)^2 + (bcd)^2,
\end{aligned}$$

pri čemu posljednja nejednakost vrijedi zbog uređaja brojeva a, b, c, d. Iz ovoga slijedi da lijeva strana dane nejednakosti postiže maksimum kada je jedan od brojeva jednak nuli, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $d = 0$. Međutim, tada vrijedi:

$$(abc)^2 + (abd)^2 + (acd)^2 + (bcd)^2 = (abc)^2 \overset{\text{A–G}}{\leqslant} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 = \left(\frac{4}{3}\right)^6,$$

što znači da je $D_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^6$.

Zadatak 2.

Dani su prirodni brojevi N i K. Neki broj učenika je raspoređen u N nepraznih grupa, a zatim su ti isti učenici preraspoređeni u $N + K$ nepraznih grupa. Dokaži da se u drugom rasporedu barem $K + 1$ učenika našlo u manjoj grupi od one u kojoj su bili u prvom rasporedu.

Rješenje.

Neka je S skup svih učenika. Za $s \in S$ označimo s a_s broj učenika u grupi učenika s u početnoj raspodjeli, a s b_s broj učenika u grupi učenika s u konačnoj raspodjeli.

Tada vrijedi

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{a_s} = N, \quad \sum_{s \in S} \frac{1}{b_s} = N + K.$$

Zato je zbroj razlika svih brojeva pridruženih učenicima jednak

$$\sum_{s \in S} \left(\frac{1}{b_s} - \frac{1}{a_s}\right) = K.$$

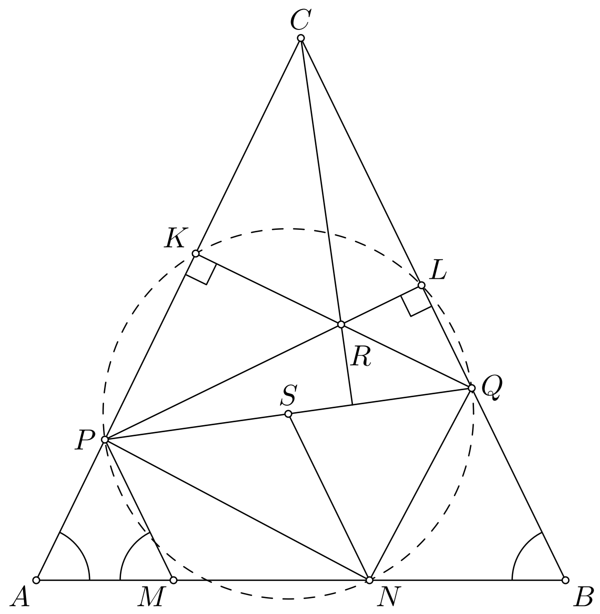
Kako je $\left|\frac{1}{b_s} - \frac{1}{a_s}\right| < 1$ slijedi da za barem $K + 1$ učenika vrijedi $\frac{1}{b_s} - \frac{1}{a_s} > 0$ odnosno $b_s < a_s$.

Zadatak 3.

Dan je jednakokračni trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Točka P na stranici $\overline{AC}$ i točka Q na stranici $\overline{BC}$ odabrane su tako da je $|AP|+|BQ| = |PQ|$. Paralela s pravcem BC kroz polovište dužine $\overline{PQ}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki N. Kružnica opisana trokutu PNQ siječe pravac AC u točkama P i K, a pravac BC u točkama Q i L. Ako je točka R sjecište pravaca PL i QK, dokaži da je pravac PQ okomit na pravac CR.

Rješenje.

Neka je S polovište dužine $\overline{PQ}$ i neka je točka M na stranici $\overline{AB}$ takva da je $MP \parallel BC$.



Vrijedi $\sphericalangle PMA = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB = \sphericalangle PAM$ pa je trokut PAM jednakokračan i vrijedi $|PA| = |PM|$. Četverokut $PMBQ$ je trapez kojem je dužina $\overline{SN}$ srednjica pa vrijedi

$$|SN| = \frac{|PM| + |QB|}{2} = \frac{|AP| + |QB|}{2} = \frac{|PQ|}{2}.$$

Stoga je S središte opisane kružnice trokuta PQN, a dužina $\overline{PQ}$ njen promjer.

Prema Talesovom poučku je $QK \perp CP$ i $PL \perp CQ$ pa je točka R ortocentar trokuta CPQ. Stoga je $CR \perp PQ$.

Zadatak 4.

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n koji imaju više od dva različita prosta djelitelja i za koje je $2^n - 8$ djeljivo s n.

Rješenje.

Dokazat ćemo da za prirodne brojeve oblika $n = 2^{2p} - 1$, gdje je $p > 3$ prost broj, vrijedi da $n \mid 2^n - 8$ i da n ima barem tri različita prosta djelitelja.

Kako je $2^n - 8 = 8(2^{n-3} - 1)$, da bismo dokazali da $n \mid 2^n - 8$ dovoljno je dokazati da

$$2p \mid n - 3.$$

Naime, u tom slučaju je $n - 3 = 2pk$ za neki prirodan broj k, pa je

$$2^{n-3} - 1 = 2^{2pk} - 1 = (2^{2p})^k - 1 = (2^{2p} - 1)(2^{2p(k-1)} + 2^{2p(k-2)} + \cdots + 2^{2p} + 1),$$

tj. $2^{2p} - 1 = n \mid 2^{n-3} - 1 \quad \Rightarrow \quad n \mid 2^n - 8$.

Prema malom Fermatovom teoremu je $2^p \equiv 2 \pmod{p}$, iz čega slijedi da je

$$n - 3 = 2^{2p} - 4 = (2^p)^2 - 4 \equiv 2^2 - 4 = 0 \pmod{p}.$$

Očito je $n - 3$ paran broj pa budući da su 2 i p relativno prosti zaključujemo da je

$$n - 3 = 2^{2p} - 4 \equiv 0 \pmod{2p}.$$

Preostaje nam pokazati da n ima barem tri različita prosta djelitelja. Uočimo da je

$$n = 2^{2p} - 1 = (2^p - 1)(2^p + 1).$$

Kako su $2^p - 1$ i $2^p + 1$ dva uzastopna neparna broja, oni su relativno prosti pa nemaju zajedničkih prostih djelitelja. Broj $2^p - 1$ ima barem jednog prostog djelitelja pa vidimo da je dovoljno dokazati da $2^p + 1$ ima barem dva različita prosta djelitelja. Budući da je $p > 3$ možemo ga zapisati u obliku $p = 3k + r$, gdje je $k \geqslant 1$ i $r \in \{1, 2\}$.

Budući da je p neparan, vrijedi:

$$2^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 = -1 + 1 = 0 \pmod{3}$$

i

$$2^p + 1 = (2^3)^k \cdot 2^r + 1 \equiv (-1)^k 2^r + 1 \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Dokazali smo da je $2^p + 1$ djeljivo s 3, ali nije djeljivo s 9 što znači da $2^p + 1$ ne može biti potencija broja 3, odnosno $2^p + 1$ ima barem još jednog prostog djelitelja različitog od 3.

Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 1.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.
Dokaži nejednakost:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_3a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2 + a_na_1} + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1a_2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Rješenje.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} &= \frac{a_1^3 + a_1a_2a_3 - a_1a_2a_3}{a_1^2 + a_2a_3} = a_1 - a_1a_2a_3 \cdot \frac{1}{a_1^2 + a_2a_3} \\
&\overset{\text{A–G}}{\geqslant} a_1 - a_1a_2a_3 \cdot \frac{1}{2a_1\sqrt{a_2a_3}} = a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_2a_3} \overset{\text{A–G}}{\geqslant} a_1 - \frac{a_2 + a_3}{4}
\end{aligned}$$

Zbrajanjem n analognih nejednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_3a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2 + a_na_1} + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1a_2} \\
&\geqslant \left(a_1 - \frac{a_2 + a_3}{4}\right) + \left(a_2 - \frac{a_3 + a_4}{4}\right) + \cdots + \left(a_{n-1} - \frac{a_n + a_1}{4}\right) + \left(a_n - \frac{a_1 + a_2}{4}\right) \\
&= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.

Grupa ljudi različitih visina pleše mađarski narodni ples na otvaranju natjecanja MEMO 2013 u Veszprému. Kažemo da je čovjek *prosječan* ako je viši od jednog svog susjeda i niži od drugog. (Ljudi su raspoređeni u krug i svaki čovjek ima točno dva susjeda.)

Ako je ukupan broj ljudi N, odredi sve moguće vrijednosti broja prosječnih ljudi.

Rješenje.

Promotrimo kako se mijenaju visine ljudi u krugu. Za svaki par susjednih osoba A i B, pri čemu u smjeru kazaljke na satu osoba B dolazi poslije osobe A, stavimo između njih znak $\clubsuit$ ako je osoba B viša od osobe A, a znak $\spadesuit$ ako je osoba B niža od osobe A. Na taj način dobivamo niz od N znakova $\clubsuit$ ili $\spadesuit$.

Osoba je prosječna ako i samo ako je znak ispred te osobe jednak znaku iza te osobe. Zato je broj osoba koje nisu prosječne jednak broju promjena u dobivenom nizu znakova $\clubsuit$ i $\spadesuit$. Broj promjena iz znaka $\clubsuit$ u znak $\spadesuit$ je jednak broju promjena iz znaka $\spadesuit$ u znak $\clubsuit$ pa je broj ljudi koji nisu prosječni paran.

Dakle, broj prosječnih osoba mora imati istu parnost kao i broj N. Budući da najviša osoba u krugu nije prosječna ukupan broj prosječnih osoba ne može biti N.

Neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ visine ljudi. Primjerom pokazujemo da za svaki $k = 1, \ldots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ postoji raspored tih N ljudi u krug pri čemu je točno $N - 2k$ ljudi prosječno. Naime, u rasporedu ljudi u krug pri čemu su visine u smjeru kazaljke na satu redom

$$\underbrace{a_1, a_N, a_2, a_{N-1}, \ldots, a_k, a_{N-k+1}}, \underbrace{a_{N-k}, \ldots, a_{k+1}}$$

prvih $2k$ ljudi nije prosječno, a preostalih $N - 2k$ je prosječno.

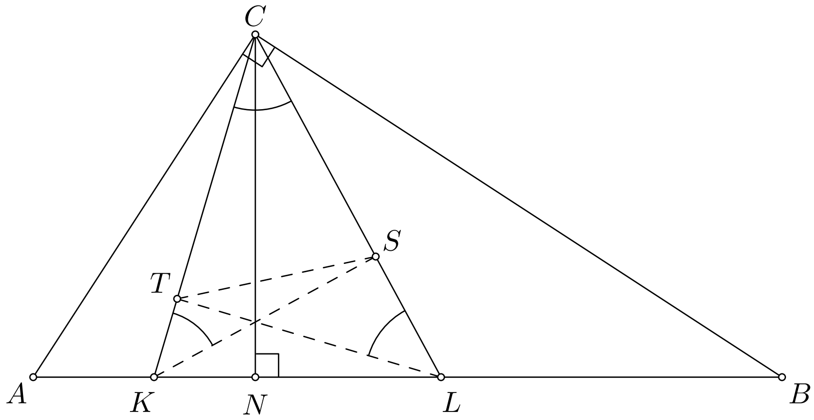
Ovo pokazuje da broj prosječnih ljudi može biti bilo koji broj manji od N iste parnosti kao N.

Zadatak 3.

Točka N je nožište visine na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC. Simetrale kutova $\sphericalangle NCA$ i $\sphericalangle BCN$ sijeku dužinu $\overline{AB}$ redom u točkama K i L. Ako su S i T redom središta kružnica upisanih trokutima BCN i NCA, dokaži da je četverokut $KLST$ tetivan.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$. Tada je i $\sphericalangle BCN = \alpha$ i $\sphericalangle ACN = \beta$.



Pravci CS i CT su simetrale kutova $\sphericalangle BCN$ odnosno $\sphericalangle ACN$, pa su točke C, S i L odnosno C, T i K kolinearne. Vrijedi $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BCN + \sphericalangle NCK = \alpha + \frac{1}{2}\beta$. Također, $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CAK + \sphericalangle ACK = \alpha + \frac{1}{2}\beta$.

Dakle, $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BKC$, pa je trokut BCK jednakokračan i vrijedi $|BK| = |BC|$. To znači da točka S leži na simetrali dužine $\overline{CK}$ pa je $|SC| = |SK|$. Odatle slijedi $\sphericalangle SKT = \sphericalangle SCT$.

Analogno, trokut ACL je jednakokračan i točka T leži na simetrali dužine $\overline{CL}$ pa vrijedi $\sphericalangle SLT = \sphericalangle SCT$.

Time je dokazano $\sphericalangle SKT = \sphericalangle SLT$ što znači da su točke K, L, S i T konciklične.

Zadatak 4.

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje je $2^n - 8$ djeljivo s n.

Rješenje.

Dokazat ćemo da za prirodne brojeve oblika $n = 3p$, gdje je $p > 3$ prost broj, vrijedi da

$$n \mid 2^n - 8.$$

Prema malom Fermatovom teoremu je $2^p \equiv 2 \pmod{p}$, iz čega slijedi da je

$$2^{3p} - 8 = (2^p)^3 - 8 \equiv 2^3 - 8 = 0 \pmod{p}. \tag{16}$$

Isto tako, budući da je $3p$ neparan broj, vrijedi

$$2^{3p} - 8 \equiv (-1)^{3p} - 2 = -3 \equiv 0 \pmod{3}. \tag{17}$$

Budući da su 3 i p relativno prosti, iz (16) i (17) zaključujemo da je

$$2^{3p} - 8 \equiv 0 \pmod{3p}.$$

Kako je prostih brojeva većih od 3 beskonačno mnogo, time smo dokazali traženu tvrdnju.