

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

I. razred

1. Neka je n prirodan broj. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$|| \dots || |x - 1| - 2| - 3| - \dots - (n - 1)| - n| = 0.$$

2. Zadani su realni brojevi $a < b < c < d$. Odredite sve mogućnosti izbora brojeva p, q, r, s za koje je $\{a, b, c, d\} = \{p, q, r, s\}$, a vrijednost izraza

$$(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - s)^2 + (s - p)^2$$

je najmanja.

3. Zadane su kružnica i tetiva koja dijeli njezinu nutrinu na dva kružna odsječka. U njih su upisane kružnice k_1 i k_2 koje iznutra diraju kružnicu k , i danu tetivu diraju u istoj točki s raznih njezinih strana. Dokažite da je omjer polumjera kružnica k_1 i k_2 konstantan, tj. da ne ovisi o položaju zajedničkog dirališta s tetivom.
4. Na beskonačnom bijelom papiru podijeljenom na jednake kvadratiće neki od njih su obojeni crvenom bojom. U svakom 2×3 pravokutniku točno dva kvadratića su crvena. Promatrajte bilo koji 9×11 pravokutnik. Koliko u njemu ima crvenih kvadratića?

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

II. razred

1. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O . Neka su M i N polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a L točka presjeka pravaca AM i BN .
Dokažite:
 - (a) $P(ABL) = P(DMLN)$;
 - (b) $\sphericalangle ALD = \sphericalangle OLN = 60^\circ$;
 - (c) $\sphericalangle OLD = 90^\circ$.
2. Dokažite da za pozitivne, realne i različite brojeve a , b i c vrijedi nejednakost
$$a^a b^b c^c > a^b b^c c^a.$$
3. U decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenaka, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenaka. Kolika je suma $m + n$?
4. U ravnini je dano 1997 točaka. Dokažite da među svim udaljenostima po dvije od tih točaka ima barem 32 različite.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

III. razred

1. Neka su x, y, z, a, b, c cijeli brojevi za koje vrijedi:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= a^2, \\x^2 + z^2 &= b^2, \\y^2 + z^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Dokažite da je broj xyz djeljiv s

- (a) 5, (b) 55.

2. Dokažite da za svaki realan broj x i svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 2^2 x| + \cdots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

3. Neka su u tetraedru $ABCD$ površine strana ABD , ACD , BCD i BCA redom jednake S_1 , S_2 , Q_1 , Q_2 , a prostorni kut između strana ABD i ACD jednak α , odnosno β između BCD i BCA . Dokažite da je

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\cos\beta.$$

4. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su slični trokuti ABD , BCE , CAF ($k = |AD| : |DB| = |BE| : |EC| = |CF| : |FA|$; $\alpha = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CFA$). Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ vrhovi paralelograma, čiji je jedan kut jednak α , a omjer duljina odgovarajućih stranica k .

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Novi Vinodolski, 8. – 11. svibnja 1997. godine

IV. razred

1. Nađite posljednje četiri znamenke broja 3^{1000} i broja 3^{1997} .
2. U ravni je dana kružnica k i točka K . Za bilo koje dvije različite točke P i Q na k , kružnica k' prolazi kroz točke P , Q i K . Neka je M sjecište tangente na kružnicu k' u točki K i pravca PQ . Opišite geometrijsko mjesto točaka M kada P i Q prolaze svim točkama kružnice k .
3. Dana je funkcija f definirana na pozitivnim cijelim brojevima, koja ima ova svojstva

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2,$$

$$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)), \quad (n \geq 1).$$

- (a) Pokažite da je $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ za svaki $n \geq 1$.
- (b) Ako je $f(n)$ neparan, pokažite da je $f(n+1) = f(n) + 1$.
- (c) Za dani prirodan broj k odredite sve vrijednosti n za koje je

$$f(n) = 2^{k-1} + 1.$$

4. Neka je k prirodan broj. Odredite broj nesukladnih trokuta kojima su vrhovi u vrhovima zadanog pravilnog $6k$ -terokuta.