

REPUBLIKA HRVATSKA  
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA  
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE  
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola  
PULA, 2. svibnja 1992.

1. razred

1. Naći najmanju vrijednost zbroja

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

pri čemu su  $x, y, z$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .  
Za koje brojeve se ona dostiže?

2. Površina pravokutnog trokuta jednaka je umnošku udaljenosti krajeva hipotenuze od njezinog dirališta s upisanom kružnicom. Dokaži!

3. Da li jednačina  $y^2 = x^2 + 1990$  ima cjelobrojno rješenje?

4. Riješi sustav jednačina

$$|x - 3| + |y + 2| = 1$$

$$|x + 1| - |y - 1| = 2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

i skiciraj skup rješenja u koordinatnoj ravnini.

REPUBLIKA HRVATSKA  
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA  
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE  
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola  
PULA, 2. svibnja 1992.

2. razred

1. Kolike su duljine kateta pravokutnog trokuta kojemu je  $c$  duljina hipotenuze, a  $\rho$  polumjer upisane kružnice.
2. Neka su  $z_1, z_2, z_3, z_4$  kompleksni brojevi redom u  $I, II, III, IV$  kvadrantu kompleksne ravnine i  $\alpha_i = |z_i - z_{i+1}| - |z_i + z_{i+1}|$ ,  $z_5 = z_1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dokaži da je bar jedan od brojeva  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  nenegativan.
3. Za koje vrijednosti realnog broja  $a$  jednačba
$$2x^2 + x + \log_a(a - 2) = 0$$
ima realna rješenja po apsolutnoj vrijednosti većoj od  $\frac{1}{2}$ .
4. U ravnini su dane 1992 točke od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokaži da postoji 498 četverokuta kojima su te točke vrhovi takvi da se nikoja dva na sijeku.

REPUBLIKA HRVATSKA  
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA  
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE  
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola  
2. svibnja 1992.

## 3. RAZRED

1. Brojevi 1, 2, 7 imaju svojstvo  $1 \cdot 2 + 2 = 2^2$ ,  $1 \cdot 7 + 2 = 3^2$ ,  $2 \cdot 7 + 2 = 4^2$ . Dokažite da ne postoje četiri različita prirodna broja sa svojstvom da je produkt svaka dva među njima uvećan za 2 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.
2. Neka su  $z$  i  $w$  kompleksni brojevi takvi da vrijedi  $|z| = |w| = |z - w|$ . Izračunajte  $\left(\frac{z}{w}\right)^{1992}$ .
3. Dva sukladna pravokutnika postavljena su tako da se njihovi rubovi sijeku u 8 točaka. Dokažite da je površina njihovog presjeka veća od polovine površine svakog od njih.
4. Defektna  $d \times d$  šahovska ploča je  $d \times d$  šahovska ploča s uklonjenim jednim kvadratićem (bilo kojim). Dokažite da se svaka defektna  $2^n \times 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  šahovska ploča može pokriti trionimima, figurama od tri polja u obliku slova L.

REPUBLIKA HRVATSKA  
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA  
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE  
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola  
2. svibnja 1992.

## 4. RAZRED

1. Osnovka trostrane piramide je trokut sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Nasuprotni bridovi su duljina  $m$ ,  $n$  i  $p$ . Dokažite da udaljenost vrha piramide od težišta osnovke iznosi

$$\frac{1}{3}\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2) - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

2. Nađite sve prirodne brojeve  $n$  za koje polinom  $P(x) = x^n + (2+x)^n + (2-x)^n$  posjeduje barem jednu cjelobrojnu nul-točku.
3. Neka je  $A = \{z_1, \dots, z_n\}$  skup od  $n$  kompleksnih brojeva,  $n \geq 2$  i neka je za svaki  $i$   $\{z_i z_1, z_i z_2, \dots, z_i z_n\} = A$ .
- a) Dokažite da je za svaki  $i$  ispunjeno  $|z_i| = 1$ .
- b) Dokažite da iz  $z \in A$  slijedi i  $\bar{z} \in A$ .
4. Odredite geometrijski niz realnih brojeva ako je poznato da je zbroj prva četiri člana jednak 15, a zbroj njihovih kvadrata je 85.