

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

I. razred

1. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$x^2 - y^2 = 2(xz + yz + x + y),$$

$$y^2 - z^2 = 2(yx + zx + y + z),$$

$$z^2 - x^2 = 2(zy + xy + z + x).$$

2. Dokažite da su težišnice iz vrhova A i B trokuta ABC međusobno okomite ako i samo ako za duljine stranica vrijedi jednakost

$$|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2.$$

3. Dokažite da za svaka tri realna broja x, y, z vrijedi nejednakost

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z| \geq 0.$$

4. Niz znamenaka 1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, ... konstruira se tako da je svaki broj, počevši od petog, jednak znamenki jedinica zbroja prethodne četiri znamenke.

a) Da li se u tom nizu redom pojavljuju znamenke 2, 0, 0, 4, tim redom?

b) Da li se u tom nizu ikad ponavljaju početne znamenke 1, 2, 3, 4, tim redom?

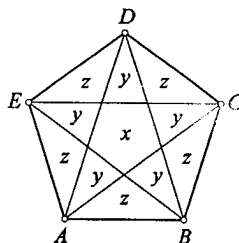
MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

II. razred

1. Pojedini dijelovi pravilnog peterokuta $ABCDE$ imaju površine označene sa x , y , z kao na slici. Ako je zadana površina x , nađite površine y i z , te površinu cijelog peterokuta.



2. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

3. Brojevi (p_n) za $n \in \mathbb{N}$ definirani su na sljedeći način:

$p_1 = 2$ i za $n \geq 2$, p_n je najveći prosti djeljitelj od $p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$. Dokažite da je $p_n \neq 5$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

4. Žaba skače po točkama koordinatne mreže počevši od točke $(1, 1)$ po sljedećim pravilima:

- (i) iz točke (a, b) žaba smije skočiti u točku $(2a, b)$, odnosno $(a, 2b)$;
- (ii) ako je $a > b$, žaba smije skočiti iz (a, b) u $(a - b, b)$, a ako je $a < b$, žaba smije skočiti iz (a, b) u $(a, b - a)$.

Da li žaba može stići u točku

- (a) $(24, 40)$,
- (b) $(40, 60)$,
- (c) $(24, 60)$,
- (d) $(200, 4)$?

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

III. razred

1. Neka je $ABCD$ kvadrat i P točka na kružnici opisanoj kvadratu na luku $\widehat{AB}$ koji ne sadrži točku C . Koje vrijednosti može poprimiti izraz

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}?$$

2. Dokažite da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\frac{\cos \alpha}{a^3} + \frac{\cos \beta}{b^3} + \frac{\cos \gamma}{c^3} \geq \frac{3}{2abc},$$

pri čemu su a, b, c duljine stranica trokuta, te α, β, γ odgovarajući kutovi.

3. Visine trostrane piramide sijeku se u jednoj točki. Dokažite da ta točka, točnije jedna od visina, dijeli visinu na dva dijela, a tri točke koje dijele preostale tri visine u omjeru $2 : 1$, počevši od vrha piramide, leže na istoj sferi.
4. Konačan broj polja beskonačne kvadratne mreže obojen je crnom bojom. Dokažite da je u toj ravni moguće odabrati konačno mnogo kvadrata koji zadovoljavaju svaki od sljedećih uvjeta:
- (i) Unutrašnjosti svaka dva različita kvadrata su disjunktne (imaju prazan presjek).
 - (ii) Svako crno obojeno polje leži u nekom od tih kvadrata.
 - (iii) Površina crnih polja u svakom od odabranih kvadrata je barem $\frac{1}{5}$, a najviše $\frac{4}{5}$ površine tog kvadrata.

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

IV. razred

1. Neka je n prirodan broj i neka su $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ kompleksni brojevi takvi da za svaki izbor brojeva $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ iz skupa $\{-1, 1\}$ vrijedi

$$|\varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_n z_n| \leq |\varepsilon_1 w_1 + \dots + \varepsilon_n w_n|.$$

Dokažite da je

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2.$$

2. Unutar trokuta ABC s duljinama stranica a, b, c i odgovarajućim kutovima α, β, γ postoje točke P i Q takve da vrijedi

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \sphericalangle APB = 120^\circ,$$

$$\sphericalangle BQC = 60^\circ + \alpha, \quad \sphericalangle CQA = 60^\circ + \beta, \quad \sphericalangle AQB = 60^\circ + \gamma.$$

Dokažite da vrijedi jednakost

$$(|AP| + |BP| + |CP|)^3 \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot |CQ| = (abc)^2.$$

3. Nizovi realnih brojeva $(x_n), (y_n), (z_n), n \in \mathbb{N}$, definirani su formulama

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1},$$

a početni članovi su $x_1 = 2, y_1 = 4$ i z_1 takav da vrijedi $x_1 y_1 z_1 = x_1 + y_1 + z_1$.

a) Provjerite da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ zadovoljeni uvjeti: $x_n^2 \neq 1, y_n^2 \neq 1, z_n^2 \neq 1$.

b) Da li postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k + y_k + z_k = 0$?

4. Odredite sve realne brojeve α sa svojstvom da su svi brojevi u nizu

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 2^2\alpha, \dots, \cos 2^n\alpha, \dots$$

negativni.