

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za I. razred srednje škole

A varijanta

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadске znamenke) koji su jednaki izrazu $x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.

2. Neka su a, b, c realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Dokaži da je $a + \frac{1}{b} = -abc$.

3. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Ta tri pravca ne prolaze istom točkom, već njihove točke presjeka čine vrhove novog trokuta. Dokaži da novi trokut ne može biti jednakostraničan.
4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za **II. razred** srednje škole

A varijanta

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi

$$m^3 + n^3 = (m + n)^2.$$

2. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0.$$

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B . Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C , a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D . Polupravac kroz točku A , koji leži unutar kuta $\angle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M , kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P . Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P .
4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za III. razred srednje škole

A varijanta

1. Duljine stranica trokuta su a , b i $c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a > b$. Dokaži da za kutove α i β , nasuprotne stranicama a i b , vrijedi $\alpha - \beta = 90^\circ$.
2. U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$, te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je AF okomito na EC .
3. Kružnice C_1 i C_2 sijeku se u točkama A i B . Tangenta kružnice C_2 povučena iz točke A siječe kružnicu C_1 u točki C , a tangenta kružnice C_1 povučena iz točke A siječe kružnicu C_2 u točki D . Polupravac kroz točku A , koji leži unutar kuta $\angle CAD$, siječe kružnicu C_1 u točki M , kružnicu C_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P . Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P .
4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A , B , C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow A$).

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za **IV. razred** srednje škole

A varijanta

1. Dokaži da sjecište pravaca koji sadrže visine trokuta, kojeg tvore tri tangente parabole, leži na ravnalici te parabole.
2. Ako su k i n prirodni brojevi, dokaži da je izraz

$$(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{4k-1},$$

djeljiv s $n^5 + 1$.

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B . Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C , a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D . Polupravac kroz točku A , koji leži unutar kuta $\angle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M , kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P . Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P .
4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow D, D \leftrightarrow A$).

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.