

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

I. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$$

u skupu prirodnih brojeva.

2. Kružnica upisana u trokut ABC dodiruje njegove stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama A_1 , B_1 , C_1 . Izrazite kutove trokuta $A_1B_1C_1$ pomoću kutova trokuta ABC .
3. Neka je $m \geq 2$ prirodan broj. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima jednadžba

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor \quad ?$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

4. Na raspolaganju su kovanice od 1, 2, 5, 10, 20, 50 lipa i od 1 kune. Dokažite da ako se iznos od M lipa može isplatiti pomoću N kovanica, onda se iznos od N kuna može isplatiti pomoću M kovanica.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

II. razred

1. Neka je a pozitivan realan broj, a x_1, x_2, x_3 realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dokažite nejednakost

$$\log_2(1 + a^{x_1}) + \log_2(1 + a^{x_2}) + \log_2(1 + a^{x_3}) \geq 3.$$

2. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ACXE$ i $CBDY$. Dokažite da se pravci AD i BE sijeku na visini iz vrha C trokuta ABC .

3. Neka su j i k prirodni brojevi. Dokažite da nejednakost

$$\lfloor (j+k)\alpha \rfloor + \lfloor (j+k)\beta \rfloor \geq \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor j\beta \rfloor + \lfloor k(\alpha + \beta) \rfloor$$

vrijedi za sve realne brojeve α i β ako i samo ako je $j = k$.

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

4. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ stranice duljine 20, dane su točke T_i , $i = 1, 2, \dots, 2000$, tako da nikoje tri točke u skupu $S = \{A, B, C, D\} \cup \{T_i : i = 1, 2, \dots, 2000\}$ nisu kolinearne. Dokažite da postoji barem jedan trokut, s vrhovima u skupu S , površine manje od $\frac{1}{10}$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

III. razred

1. Dane su točke B i C , dok je A varijabilna, takva da je $\sphericalangle BAC$ fiksna. Polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su točke D i E redom. Točke F i G su takve da je $DF \perp AB$ i $EG \perp AC$, a BF i CG su okomite na BC . Dokažite da umnožak $|BF| \cdot |CG|$ ne ovisi o položaju točke A .
2. Pet različitih četveroznamenastih brojeva koji počinju s istom znamenkom imaju svojstvo da četiri od njih dijele zbroj svih pet brojeva. Nađite sve takve petorke.
3. Kvadar je presječen ravninom tako da je presjek pravilni šesterokut. Dokažite da je to moguće samo ako je kvadar kocka.
4. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi ova jednakost

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \dots + \lfloor \log_n n \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor.$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

IV. razred

1. Dana je točka T_0 na paraboli $\mathcal{P}$ s jednadžbom $y^2 = 2px$ i točka T'_0 takva da je polovište dužine $\overline{T_0T'_0}$ na osi parabole $\mathcal{P}$. Za varijabilnu točku T na $\mathcal{P}$, različitu od T_0 i njoj simetrične točke s obzirom na os parabole, okomica iz točke T'_0 na pravac T_0T siječe paralelu s osi parabole kroz točku T u točki T' . Što opisuje točka T' ?
2. Krakovi jednakokračnog trokuta ABC diraju kružnicu čije se središte nalazi na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta. Točke P i Q nalaze se na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom. Dokažite da je

$$|PB| \cdot |CQ| = \left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2$$

ako i samo ako je PQ tangenta promatrane kružnice.

3. Na kružnici je zapisano $n \geq 3$ prirodnih brojeva tako da svaki od njih dijeli zbroj dva njemu susjedna broja. Označimo

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}.$$

Odredite najveću i najmanju vrijednost od S_n .

4. Neka je $S = \{k \in \mathbb{N} : a \in \mathbb{N}, a^2 | k \Rightarrow a = 1\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\sum_{k \in S} \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} \right\rfloor = n.$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)