Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

prvi dan

9. travnja 2011.

1. Dokaži da za pozitivne hkjsdhfjhsdkhf realne brojeve a, b i c za koje je $a+b+c=3$ vrijedi
$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

2. Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

3. U trokutu ABC s težištem T i središtem opisane kružnice O vrijedi $OT\perp AT$. Neka je A' drugo sjecište pravca AT i kružnice opisane trokutu ABC. Neka je točka D sjecište pravaca BA' i AC, a točka E sjecište pravaca CA' i AB. Dokaži da središte kružnice opisane trokutu ADE leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.

4. Neka su a i b relativno prosti prirodni brojevi različiti od 1. Definiran je niz
$$x_1=a,\qquad x_2=b,\qquad x_n=\frac{x_{n-1}^2+x_{n-2}^2}{x_{n-1}+x_{n-2}}\quad\text{za } n\geqslant 3.$$
Dokaži da niti jedan član x_n ovog niza, osim prva dva, nije prirodni broj.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

prvi dan

Rješenja zadataka

Zadatak 1.

Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b i c za koje je $a+b+c=3$ vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Prvo rješenje.

Član $\dfrac{a^2}{a+b^2}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b^2} &= \frac{a\left(a+b^2\right)-ab^2}{a+b^2} = a-\frac{ab^2}{a+b^2}\\ &\overset{\text{A–G}}{\geqslant} a-\frac{ab^2}{2b\sqrt{a}} = a-\frac{b\sqrt{a}}{2}.\end{aligned}$$

Ako i druga dva člana lijeve strane tražene nejednakosti ocijenimo na isti način dobijemo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} &\geqslant \left(a-\frac{b\sqrt{a}}{2}\right)+\left(b-\frac{c\sqrt{b}}{2}\right)+\left(c-\frac{a\sqrt{c}}{2}\right)\\ &= (a+b+c)-\frac{1}{2}\left(b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c}\right)\\ &= 3-\frac{1}{2}\left(b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c}\right).\end{aligned}$$

Uvedemo li supstituciju $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ i $z=\sqrt{c}$, vidimo da je dovoljno dokazati da je

$$3-\frac{1}{2}\left(xy^2+yz^2+zx^2\right) \geqslant \frac{3}{2},$$

odnosno $xy^2+yz^2+zx^2 \leqslant 3$, pri čemu je $x^2+y^2+z^2=3$.

Sada imamo:

$$\begin{aligned}3\left(xy^2+yz^2+zx^2\right) &= 2xy^2+xy^2+2yz^2+yz^2+2zx^2+zx^2\\ &= y\left(2xy+z^2\right)+x\left(2zx+y^2\right)+z\left(2yz+x^2\right)\\ &\overset{\text{G–A}}{\leqslant} y\left(x^2+y^2+z^2\right)+x\left(z^2+x^2+y^2\right)+z\left(y^2+z^2+x^2\right)\\ &= 3\left(x+y+z\right) \overset{\text{A–K}}{\leqslant} 9\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = 9,\end{aligned}$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Drugo rješenje.

Primjenom Cauchy-Schwarz nejednakosti dobijemo

$$\left(\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\right)\left[a^2\left(a+b^2\right)+b^2\left(b+c^2\right)+c^2\left(c+a^2\right)\right] \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\right) \geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

stoga je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Posljednja nejednakost redom je ekvivalentna s

$$\begin{aligned}
& 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geqslant 3\left(a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\
\iff\; & 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 3\left(a^3+b^3+c^3\right) \\
\iff\; & 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right) \\
\iff\; & a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant ab^3+ac^3+ba^3+bc^3+ca^3+cb^3. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Korištenjem A–G nejednakosti dobijemo:

$$\begin{array}{ccc}
a^4+a^2b^2 \geqslant 2a^3b, & b^4+b^2c^2 \geqslant 2b^3c, & c^4+c^2a^2 \geqslant 2c^3a \\
a^4+c^2a^2 \geqslant 2a^3c, & b^4+a^2b^2 \geqslant 2b^3a, & c^4+b^2c^2 \geqslant 2c^3b.
\end{array}$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti dobijemo

$$2\left(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geqslant 2\left(ab^3+ac^3+ba^3+bc^3+ca^3+cb^3\right),$$

čime smo dokazali da vrijedi $(*)$, a prema tome i početna nejednakost.

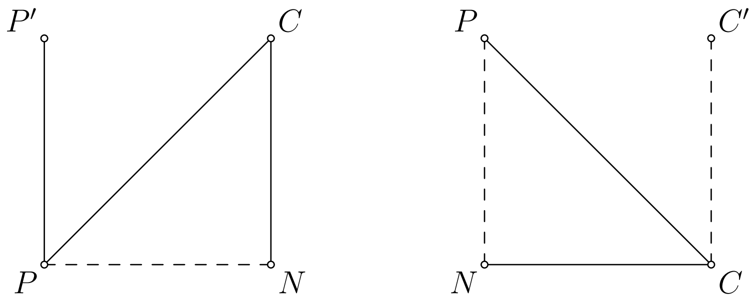
Zadatak 2.

Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

Prvo rješenje.

Tvrdnju zadatka dokazat ćemo matematičkom indukcijom. Ako su na zabavi prisutne samo četiri osobe, odaberimo tri koje se međusobno poznaju ili ne poznaju i smjestimo ih u jednu prostoriju, a preostalu osobu u drugu. Time je ispunjena tvrdnja zadatka za zabavu s četiri osobe.

Pretpostavimo da smo uspjeli smjestiti $n \geqslant 4$ osoba u prostorije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{C}$ tako da se u prostoriji $\mathcal{P}$ svi međusobno poznaju, a u prostoriji $\mathcal{C}$ nitko nikoga ne poznaje. Dokažimo da i $(n+1)$-vu osobu (označimo je s N) možemo smjestiti u jednu od prostorija tako da prethodno navedeno svojstvo ostane zadovoljeno. Ako osoba N poznaje sve osobe iz prostorije $\mathcal{P}$, traženo će svojstvo biti zadovoljeno ako osobu N smjestimo u prostoriju $\mathcal{P}$. Analogno, ako osoba N ne poznaje nikoga iz prostorije $\mathcal{C}$, traženo će svojstvo biti zadovoljeno ako osobu N smjestimo u prostoriju $\mathcal{C}$.



U preostalom slučaju, postoji osoba P iz prostorije $\mathcal{P}$ koju N ne poznaje i osoba C iz prostorije $\mathcal{C}$ koju N poznaje. Razmotrit ćemo slučaj u kojem se osobe P i C poznaju, u drugom slučaju se tvrdnja dokazuje na sličan način.

Neka je $P' \neq P$ proizvoljna osoba iz prostorije $\mathcal{P}$. Prema uvjetu zadatka, među osobama N, C, P i P' nužno postoje tri koje se međusobno poznaju ili tri koje se međusobno ne poznaju. Da bi ovaj uvjet mogao biti ispunjen za neke tri osobe, očito je da se osobe P' i C moraju poznavati. Dakle, osoba C poznaje sve osobe iz prostorije $\mathcal{P}$.

Slično, neka je $C' \neq C$ proizvoljna osoba iz prostorije $\mathcal{C}$. Prema uvjetu zadatka, među osobama N, P, C i C' nužno postoje tri koje se međusobno poznaju ili tri koje se međusobno ne poznaju. Jedine tri osobe za koje ovaj uvjet može biti ispunjen su osobe N, P i C', i to u slučaju kada se one međusobno ne poznaju. Dakle, osobe P i N ne poznaju nikoga iz prostorije $\mathcal{C}$ osim osobe C.

Iz prethodna dva zaključka vidimo da traženi uvjet možemo ispuniti tako da osobu P premjestimo u prostoriju $\mathcal{C}$, osobu C premjestimo u prostoriju $\mathcal{P}$, a osobu N smjestimo u prostoriju $\mathcal{C}$.

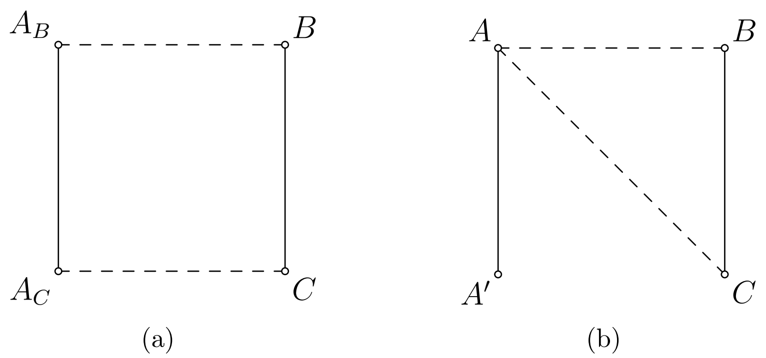
Dakle, i $n+1$ osoba možemo smjestiti na traženi način pa tvrdnja zadatka slijedi po principu matematičke indukcije.

Drugo rješenje (Grgur Valentić).

Osobe i poznanstva možemo prikazati potpunim grafom obojenim s dvije boje u kojem vrhovi predstavljaju osobe, plavi bridovi poznanstva, a crveni bridovi nepoznanstva. Za neki skup s m vrhova kažemo da je plavi (crveni) m-terokut ako su svaka dva vrha među njima povezana plavim (crvenim) bridom.

Uočimo da zbog danog svojstva, u grafu sigurno postoji crveni ili plavi trokut (ako se ograničimo na netrivijalne slučajeve u kojima graf ima barem $n \geqslant 4$ vrhova). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da u grafu postoji crveni trokut. Promatrajmo najveći crveni k-terokut. Neka je $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ skup njegovih vrhova. Ako su među ostalih $n-k$ vrhova svi bridovi plavi, tada smjestimo osobe iz skupa $\mathcal{A}$ u jednu, a ostale osobe u drugu prostoriju i zadatak je riješen.

Pokažimo da je drugi slučaj neostvariv. Pretpostavimo da postoje vrhovi B i C povezani crvenim bridom, a nisu u $\mathcal{A}$. Tada postoji vrh $A_B \in \mathcal{A}$ koji je plavim bridom povezan s vrhom B jer bi u suprotnom imali crveni $(k+1)$-terokut. Analogno zaključujemo da postoji vrh $A_C \in \mathcal{A}$ koji je plavim bridom povezan s vrhom C.



Slika 1: Pune linije označavaju crvene, a isprekidane plave bridove.

Razlikujemo dva slučaja. Ako je $A_B \neq A_C$, tada je iz Slike 1(a) jasno da među vrhovima B, C, A_B i A_C ne može postojati jednobojni trokut, što je uvjet zadatka.

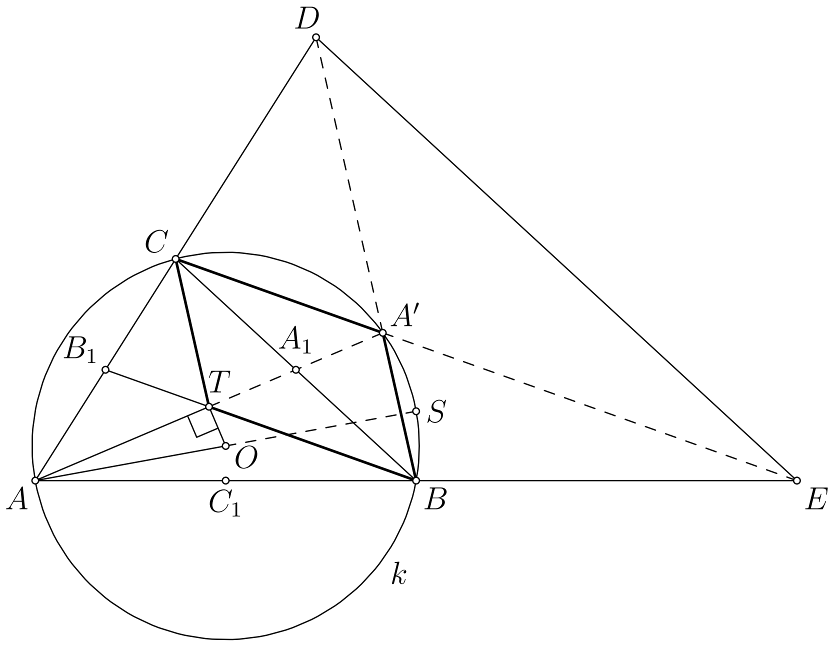
S druge strane, pretpostavimo da je $A_B = A_C = A$, za neki $A \in \mathcal{A}$. Neka je $A' \in \mathcal{A}$ proizvoljna osoba različita od osobe A. Slika 1(b) prikazuje situaciju koju imamo među vrhovima A, A', B i C. Očito je da ako imamo jednobojni trokut u tom skupu vrhova (a tako mora biti zbog uvjeta zadatka), vrh A' mora biti crvenim bridom povezan i s B i s C. Dakle, B i C su crvenim bridom povezani vrhovi koji su usto i crvenim bridom povezani sa svakim vrhom iz $\mathcal{A} \setminus \{A\}$. No, tada je $(\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup \{B, C\}$ crveni $(k+1)$-terokut, što je opet kontradikcija.

Zadatak 3.

U trokutu ABC s težištem T i središtem opisane kružnice O vrijedi $OT \perp AT$. Neka je A' drugo sjecište pravca AT i kružnice opisane trokutu ABC. Neka je točka D sjecište pravaca BA' i AC, a točka E sjecište pravaca CA' i AB. Dokaži da središte kružnice opisane trokutu ADE leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Rješenje.

Neka su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Označimo opisanu kružnicu trokuta ABC s k.



Uočimo da iz $OT \perp AA'$ slijedi da je OT simetrala tetive $\overline{AA'}$ kružnice k pa je $|AT| = |A'T|$. Kako je $\overline{AA_1}$ težišnica, slijedi $|AT| = 2|A_1T|$, a onda iz $|A'T| = 2|A_1T|$ slijedi $|A'A_1| = |A_1T|$. Sada vidimo da točka A_1 raspolavlja dužine $\overline{BC}$ i $\overline{A'T}$ pa je četverokut $BA'CT$ paralelogram.

Iz $TC \parallel BA'$ slijedi da je $\overline{CC_1}$ srednjica trokuta ABD pa je $|AD| = 2|AC|$. Analogno, iz $TB \parallel CA'$ slijedi da je $\overline{BB_1}$ srednjica trokuta AEC pa je $|AE| = 2|AB|$.

Sada vidimo da homotetija s koeficijentom 2 i središtem A preslikava trokut ABC u trokut AED. Tom homotetijom središte O opisane kružnice trokuta ABC preslikava se u središte S kružnice opisane trokutu AED. Točka S nalazi se na polupravcu AO i vrijedi $|AS| = 2|AO|$ pa je $\overline{AS}$ promjer kružnice k. Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Neka su a i b relativno prosti prirodni brojevi različiti od 1. Definiran je niz

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Dokaži da niti jedan član x_n ovog niza, osim prva dva, nije prirodni broj.

Rješenje.

Primijetimo da je $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Primijetimo i da su svi x_n racionalni brojevi pa možemo zapisati $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, gdje su p_n i q_n prirodni brojevi i $M(p_n, q_n) = 1$.

Dokažimo prvo da su p_n i p_{n+1} relativno prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$. To ćemo dokazati induktivno. Očito je $M(p_1, p_2) = M(a, b) = 1$, tj. p_1 i p_2 su relativno prosti. Pretpostavimo sad da je $M(p_n, p_{n+1}) = 1$ za neki n. Tada je

$$x_{n+2} = \frac{\frac{p_n^2}{q_n^2} + \frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2}}{\frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{q_n q_{n+1}\left(p_n q_{n+1} + p_{n+1} q_n\right)} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

Budući da je $M(p_n, p_{n+1}) = 1$ po pretpostavci indukcije i $M(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$, zaključujemo da je $M\big(p_{n+1}, p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2\big) = M\big(p_{n+1}, p_n^2 q_{n+1}^2\big) = 1$, odakle slijedi $M(p_{n+1}, p_{n+2}) = 1$. Time smo dokazali našu tvrdnju.

Želimo dokazati da x_n nije prirodan broj za svaki $n \geqslant 3$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da je x_{n+2} prirodan broj za neki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je

$$x_{n+2} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{q_n q_{n+1}\left(p_n q_{n+1} + p_{n+1} q_n\right)} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2},$$

zaključujemo da

$$q_{n+1} \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{n+1} \mid p_{n+1}^2 q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{n+1} \mid q_n^2$$

jer su p_{n+1} i q_{n+1} relativno prosti. Sada zbog $q_{n+1} \mid q_n^2$ vrijedi

$$q_{n+1}^2 \mid p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{n+1}^2 \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{n+1}^2 \mid q_n^2.$$

Analognim zaključivanjem dobijemo

$$q_n \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_n \mid p_n^2 q_{n+1}^2 \quad \Longrightarrow \quad q_n \mid q_{n+1}^2,$$

a onda i

$$q_n^2 \mid p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_n^2 \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \quad \Longrightarrow \quad q_n^2 \mid q_{n+1}^2.$$

Kako $q_{n+1}^2 \mid q_n^2$ i $q_n^2 \mid q_{n+1}^2$, zaključujemo da je $q_n^2 = q_{n+1}^2$, odnosno $q_n = q_{n+1}$, odakle je

$$x_{n+2} = \frac{p_n^2 + p_{n+1}^2}{q_n\left(p_n + p_{n+1}\right)}.$$

Znači da

$$p_n + p_{n+1} \mid p_n^2 + p_{n+1}^2 \quad \Longrightarrow \quad p_n + p_{n+1} \mid 2p_{n+1}^2$$

jer je

$$p_n^2 + p_{n+1}^2 = p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_{n+1}^2 = (p_n - p_{n+1})(p_n + p_{n+1}) + 2p_{n+1}^2.$$

Neka je p prost broj takav da $p \mid p_n + p_{n+1}$, a time i $p \mid 2p_{n+1}^2$.

Ako je $p \neq 2$ tada $p \mid p_{n+1}^2 \implies p \mid p_{n+1}$, a budući da $p \mid p_n + p_{n+1}$, znači da $p \mid p_n$, što je kontradikcija jer smo dokazali da su p_n i p_{n+1} relativno prosti.

Ako je $p = 2$ jedini prosti faktor, onda je $p_n + p_{n+1}$ potencija broja 2 koja je veća od 2 (jer su p_n i p_{n+1} veći od 1). Iz toga slijedi

$$4 \mid p_n + p_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad 4 \mid 2p_{n+1}^2 \quad \Longrightarrow \quad 2 \mid p_{n+1}^2 \quad \Longrightarrow \quad 2 \mid p_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad 2 \mid p_n,$$

što je opet kontradikcija jer je $M(p_n, p_{n+1}) = 1$.

Time smo dokazali da x_n nije prirodan broj za svaki $n \geqslant 3$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

drugi dan

10. travnja 2011.

1. Za prirodni broj d definiran je niz

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran,} \\ a_n + d, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za koje vrijednosti broja d postoji prirodni broj n za koji je $a_n = 1$?

2. Dani su prirodni brojevi M i N. Promatramo N^2 žarulja raspoređenih u tablicu s N redaka i N stupaca. Svaka žarulja može biti uključena ili isključena, a na početku su sve žarulje isključene.

Potez se sastoji od odabira bilo kojih M uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu te mijenjanja njihovog stanja, tako da svaka od odabranih M žarulja koja je prije bila isključena, nakon poteza bude uključena, i obratno.

Ako je konačnim brojem poteza moguće postići da sve žarulje budu uključene, dokaži da je broj M djelitelj broja N.

3. Na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$ dane su točke K i L. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{KL}$ u točki U i pritom su točke A i K s jedne strane te simetrale, a B i L s druge. Neka je N nožište okomice iz sjecišta pravaca AK i BL na pravac AB, a V točka na pravcu KL takva da je $\sphericalangle VAU = \sphericalangle VBU$.

Dokaži da su pravci NV i KL međusobno okomiti.

4. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

drugi dan

Rješenja zadataka

Zadatak 1.

Za prirodni broj d definiran je niz

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran,} \\ a_n + d, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za koje vrijednosti broja d postoji prirodni broj n za koji je $a_n = 1$?

Rješenje.

Prvo uočimo da je za parne d dani niz oblika $a_n = 1 + nd$, tj. niz je rastući i članovi su neparni pa se nikad neće vratiti u 1.

Neka je d proizvoljni neparni broj. Indukcijom se lako pokaže da je $a_n < d$ ako je a_n neparan te da je $a_n < 2d$ ako je a_n paran. Prema tome, niz je ograničen pa je i periodičan.

Neka je r najmanji indeks takav da je $a_r = a_s$ za neki $s \neq r$. Pretpostavimo $r > 0$.

Ako je $a_r \leqslant d$, to znači da je a_r (pa onda i a_s) dobiven dijeljenjem prethodnog člana niza s 2, tj. $a_r = a_{r-1}/2$, $a_s = a_{s-1}/2$, iz čega slijedi $a_{r-1} = a_{s-1}$, što je u kontradikciji s minimalnosti od r.

Ako je $a_r > d$, iz $a_n \leqslant 2d$ slijedi da su a_r i a_s dobiveni dodavanjem d prethodnim članovima niza, iz čega slijedi da je $a_{r-1} = a_{s-1}$, što je opet u kontradikciji s izborom indeksa r.

Dakle, $r = 0$ i $a_s = a_0 = 1$ za neki $s > 0$ za sve neparne d.

Zadatak 2.

Dani su prirodni brojevi M i N. Promatramo N^2 žarulja raspoređenih u tablicu s N redaka i N stupaca. Svaka žarulja može biti uključena ili isključena, a na početku su sve žarulje isključene.

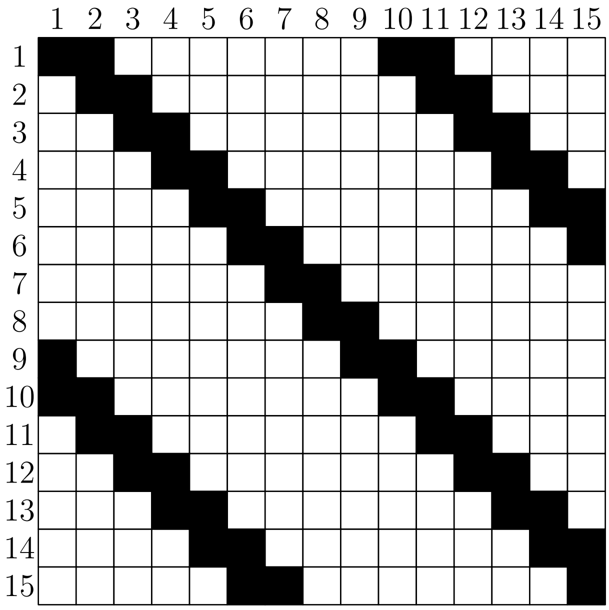
Potez se sastoji od odabira bilo kojih M uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu te mijenjanja njihovog stanja, tako da svaka od odabranih M žarulja koja je prije bila isključena, nakon poteza bude uključena, i obratno.

Ako je konačnim brojem poteza moguće postići da sve žarulje budu uključene, dokaži da je broj M djelitelj broja N.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da broj M nije djelitelj broja N. Obojimo polja te tablice crnom i bijelom bojom tako da crnom bojom obojamo glavnu dijagonalu i sve dijagonale koje su točno M polja udaljene od nje, te dijagonalu koja se nalazi neposredno iznad glavne dijagonale i sve dijagonale koje su za točno M polja udaljene od nje. Na slici je dan primjer bojanja za $N = 15$, $M = 9$.

Formalno, polje (i, j) $(i, j \in \{1, 2, \dots, N\})$ je obojano crnom bojom ako i samo ako je $i - j \equiv 0 \pmod{M}$ ili $i - j \equiv 1 \pmod{M}$.



Označimo s X broj žarulja koje su u nekom trenutku uključene i nalaze se na crnom polju tablice. Na početku su sve žarulje isključene pa je $X = 0$. Pogledajmo što se događa s brojem X u svakom koraku. Odabirom M uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu očito ćemo odabrati točno dvije žarulje koje se nalaze na crnom polju. Ako su obje odabrane žarulje prije tog poteza isključene X će se povećati za 2. Ako je jedna isključena, a druga uključena, X će ostati isti, a ako su obje žarulje uključene, X će se u tom potezu smanjiti za 2. Iz toga zaključujemo da je broj X paran nakon svakog poteza.

Tvrdnja zadatka će biti dokazana dokažemo li da je ukupan broj crnih polja u našem bojanju neparan jer će to značiti da nikako ne možemo postići da sve žarulje na crnim poljima budu uključene.

Podijelimo crna polja u dvije skupine: polja (i, j) za koja je $i - j \equiv 0 \pmod{M}$ (ovakva crna polja zovimo crnim poljima prvog tipa) i polja za koja je $i - j \equiv 1 \pmod{M}$ (ovakva crna polja zovimo crnim poljima drugog tipa). Broj crnih polja prvog tipa označimo s S_1, a broj crnih polja drugog tipa označimo s S_2.

S_1 možemo izraziti kao:

$$S_1 = N + 2 \cdot \left[(N - M) + (N - 2M) + \cdots + (N - kM)\right],$$

pri čemu je k najveći prirodni broj za koji je $N - kM \geqslant 0$, drugim riječima, $k = \lfloor \frac{N}{M} \rfloor$. U ovoj sumi pribrojnik N predstavlja broj crnih polja na glavnoj dijagonali, a broj u zagradama predstavlja broj crnih polja prvog tipa iznad (odnosno ispod) glavne dijagonale. Dobivamo da je $S_1 \equiv N \pmod{2}$.

S druge strane, broj S_2 je jednak:

$$\begin{aligned} S_2 = {} & (N - 1) + \left[(N - M - 1) + \cdots + (N - kM - 1)\right] \\ & + \left[(N - M + 1) + \cdots + (N - kM + 1)\right]. \end{aligned}$$

Pribrojnik $(N - 1)$ predstavlja broj crnih polja na dijagonali koja se nalazi neposredno iznad glavne dijagonale, izraz u prvim uglatim zagradama predstavlja broj crnih bolja drugog tipa iznad te dijagonale, dok izraz u drugim uglatim zagradama predstavlja broj crnih polja drugog tipa ispod te dijagonale. U prvim i drugim uglatim zagradama očito ima po k pribrojnika (iako zadnji pribrojnik u prvim uglatim zagradama može biti jednak nuli). Primijetimo da smo ovdje koristili činjenicu da broj M nije djelitelj broja N, jer bi u protivnome vrijedilo da je $N = k \cdot M$ pa bi u prvim zagradama zadnji broj bio -1 što znači da njega ne bismo smjeli napisati u tom zbroju.

Sada imamo:

$$S_2 = (N - 1) + \left[(N - M) + \cdots + (N - kM)\right] - k + \left[(N - M) + \cdots + (N - kM)\right] + k,$$

odnosno

$$S_2 = (N - 1) + 2 \cdot \left[(N - M) + \cdots + (N - kM)\right].$$

Iz navedenog zaključujemo da je $S_2 \equiv N - 1 \pmod{2}$, pa za ukupan broj crnih polja vrijedi:

$$S = S_1 + S_2 \equiv N + (N - 1) = 2N - 1 \equiv 1 \pmod{2},$$

odnosno S je neparan, što je i trebalo dokazati.

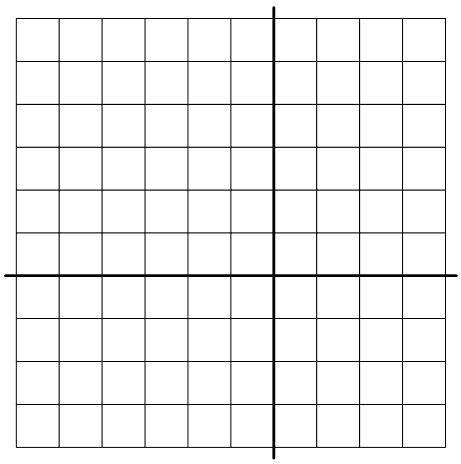
Drugo rješenje.

Obojimo žarulje u M boja (koje ćemo zvati $0, 1, 2, \ldots, M-1$) tako da žarulju u i-tom retku i j-tom stupcu obojimo bojom $i + j - 2 \pmod{M}$. Na slici je primjer bojanja za $N = 10$ i $M = 6$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
2	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
3	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
4	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0
5	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1
6	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2
7	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
8	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
9	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
10	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0

Svakim potezom mijenjamo stanje točno jedne žarulje svake boje pa time i parnost broja žarulja u svakoj boji. Na početku su sve žarulje ugašene pa zaključujemo da je nakon svakog poteza parnost broja upaljenih žarulja svake boje jednaka. Ako je moguće postići da su sve žarulje upaljene, tada je parnost broja žarulja svake boje jednak.

Pretpostavimo da je M ne dijeli N te označimo $N = Mk+r$, pri čemu je $1 \leqslant r \leqslant M-1$. Podijelimo ploču $N \times N$ u četiri dijela dimenzija $Mk \times Mk$, $Mk \times r$, $r \times Mk$ and $r \times r$, kao na slici.



Kako se svaki od dijelova dimenzija $Mk \times Mk$, $Mk \times r$ and $r \times Mk$ može podijeliti na dijelove $M \times 1$ ili $1 \times M$, vidimo da je broj žarulja svake boje u tim trima dijelovima jednak (i iznosi $Mk^2 + 2kr$).

Promotrimo preostali dio ploče dimenzija $r \times r$. Broj žarulja boje $r-1$ iznosi r dok broj žarulja boje r iznosi $r-1$. Zaista, žarulje boje $r-1$ se pojavljuju u svakom retku te ploče točno jednom, dok se žarulja boje r pojavljuje u svim redovima osim u prvom. Niti u jednom redu se ne nalaze dvije žarulje boje r jer je $r < M$ pa svaki red ima sve žarulje različite boje. Slika pokazuje slučaj $N = 10, M = 6$ i $r = 4$.

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	5
4	3	4	5	0

Zaključujemo da broj žarulja boje $r-1$ i broj žarulja boje r na početnoj ploči nisu jednake parnosti pa se ne može postići da sve žarulje budu upaljene u istom trenutku.

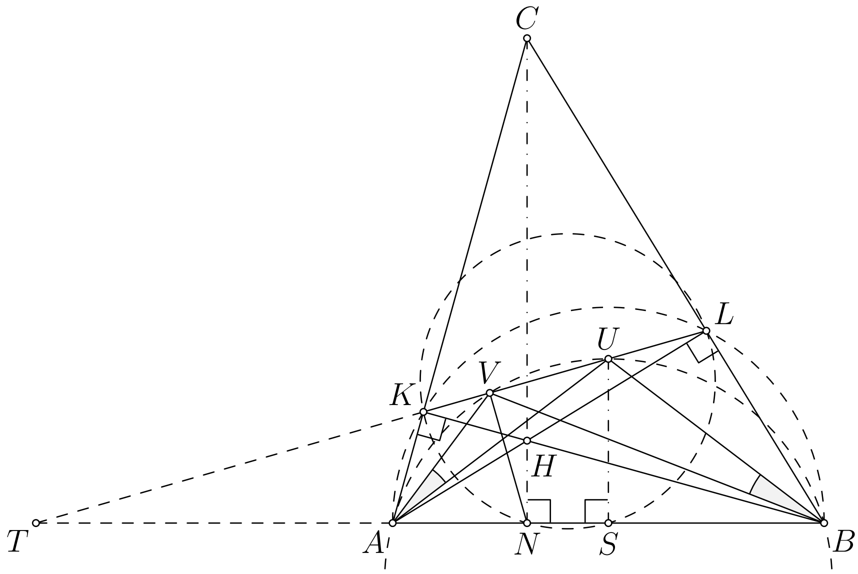
Zadatak 3.

Na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$ dane su točke K i L. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{KL}$ u točki U i pritom su točke A i K s jedne strane te simetrale, a B i L s druge. Neka je N nožište okomice iz sjecišta pravaca AK i BL na pravac AB, a V točka na pravcu KL takva da je $\sphericalangle VAU = \sphericalangle VBU$.

Dokaži da su pravci NV i KL međusobno okomiti.

Prvo rješenje.

Neka je točka S središte dane polukružnice, točka C sjecište pravaca AK i BL, a točka T sjecište pravaca AB i KL.



Kako se dužina $\overline{UV}$ iz točaka A i B vidi pod istim kutom, četverokut $ABUV$ je tetivan pa potencija točke T daje

$$|TU| \cdot |TV| = |TA| \cdot |TB| .$$

Tetivan je i četverokut $ABLK$ pa vrijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TK| \cdot |TL| .$$

Označimo sjecište dužina $\overline{AL}$ i $\overline{BK}$ s H. Uočimo da je to ortocentar trokuta ABC i da su četverokuti $ANHK$ i $BLHN$ tetivni. Kako je

$$\begin{aligned} \sphericalangle KNL &= \sphericalangle KNH + \sphericalangle HNL = \sphericalangle KAH + \sphericalangle HBL \\ &= \sphericalangle KAL + \sphericalangle KBL = 2\sphericalangle KAL = \sphericalangle KSL, \end{aligned}$$

četverokut $NSLK$ je tetivan pa vrijedi

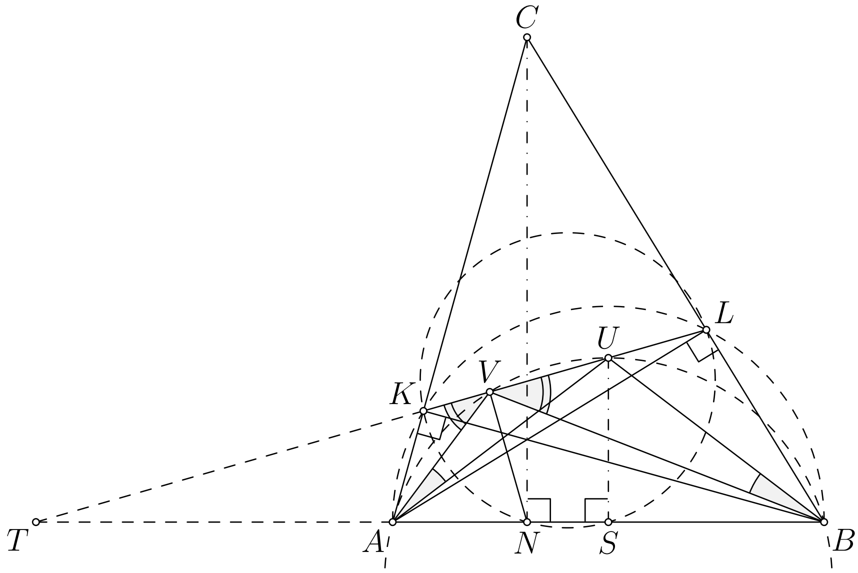
$$|TU| \cdot |TV| = |TA| \cdot |TB| = |TK| \cdot |TL| = |TS| \cdot |TN| .$$

Time je i četverokut $NSUV$ tetivan, odakle je $\sphericalangle NVU = 180° - \sphericalangle NSU = 90°$.

Napomena.

Točke K, L i N (nožišta visina trokuta ABC) zajedno s točkom S (polovištem stranice $\overline{AB}$) leže na tzv. Feuerbachovoj kružnici. Na istoj kružnici leže polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, kao i polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$, zbog čega se u literaturi često koristi i naziv *kružnica devet točaka*.

Drugo rješenje.



Uz oznake kao u prvom rješenju, vrijedi da je četverokut $ABUV$ tetivan. Iskoristimo li i činjenicu da točka U leži na simetrali dužine $\overline{AB}$, zaključujemo

$$\sphericalangle KVA = 180^\circ - \sphericalangle AVU = \sphericalangle UBA = \sphericalangle BAU = \sphericalangle BVU,$$

što znači da je pravac KL vanjska simetrala kuta $\sphericalangle AVB$.

Kako vanjska simetrala KL kuta $\sphericalangle AVB$ siječe pravac AB u točki T, vrijedi

$$\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{|AV|}{|BV|}. \qquad (*)$$

Primijenimo Menelajev teorem na trokut ABC i pravac KL:

$$\frac{|AT|}{|BT|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CK|}{|AK|} = 1$$

i Cevin teorem na trokut ABC i njegov ortocentar u kojem se sijeku pravci AL, BK i CN:

$$\frac{|AN|}{|BN|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CK|}{|AK|} = 1.$$

Iz toga slijedi $\dfrac{|AT|}{|BT|} = \dfrac{|AN|}{|BN|}$ pa zbog $(*)$ dobivamo $\dfrac{|AN|}{|BN|} = \dfrac{|AV|}{|BV|}$.

Time smo pokazali da je pravac VN simetrala kuta $\sphericalangle AVB$ pa uz činjenicu da je pravac KL njegova vanjska simetrala slijedi tvrdnja zadatka.

Varijacija drugog rješenja.

Alternativno, jednakost $\dfrac{|AN|}{|BN|} = \dfrac{|AV|}{|BV|}$ možemo dokazati trigonometrijom.

Neka je $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$.

Promatrajući pravokutne trokute ANC i CNB, uz primjenu poučka o sinusima u trokutu ABC, dobijemo:

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|CA|\cos\alpha}{|BC|\cos\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Primjenom poučka o sinusima u trokutima AVK i VBL dobijemo:

$$\frac{|AV|}{|AK|} = \frac{\sin\sphericalangle AKV}{\sin\sphericalangle KVA}, \qquad \frac{|BV|}{|BL|} = \frac{\sin\sphericalangle BLV}{\sin\sphericalangle BVU},$$

pa je

$$\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|AK|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle AKV}{\sin\sphericalangle KVA}}{|BL|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle BLV}{\sin\sphericalangle BVU}} = \frac{|AK|}{|BL|}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

jer je $\sphericalangle KVA = \sphericalangle BVU$, $\sphericalangle AKV = 180^\circ - \beta$ i $\sphericalangle BLV = 180^\circ - \alpha$.

Kako je $|AK| = |AB|\cos\alpha$ i $|BL| = |AB|\cos\beta$, konačno je

$$\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|AK|\sin\beta}{|BL|\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha} = \frac{|AN|}{|BN|}.$$

Zadatak 4.

Odredi sve parove $(x,\, y)$ cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

Rješenje.

Ako je $y = 0$ ili $y = -1$, desna strana dane jednadžbe je jednaka nuli pa je $x^3 + x^2 + x = x\left(x^2 + x + 1\right) = 0$, odakle slijedi da je $x = 0$. To nam daje dva rješenja: $(0,\, 0)$ i $(0,\, -1)$.

Dokažimo da dana jednadžba nema drugih rješenja. Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{Z} \backslash \{-1,\, 0\}$. Tada je $y^2 + y > 0$ pa je i $x\left(x^2 + x + 1\right) > 0$, iz čega slijedi da je $x > 0$.

Ako je par $(x,\, y)$ rješenje dane jednadžbe, tada je par $(x,\, -y-1)$ također rješenje jer vrijedi $y^2 + y = (-y-1)^2 + (-y-1)$. Drugim riječima, ako jednadžba nema rješenja za $y > 0$, onda nema ni drugih rješenja. Stoga, možemo pretpostaviti da je $y > 0$.

Danu jednadžbu možemo ekvivalentno zapisati kao:

$$x^3 = (y - x)(x + y + 1)\,. \tag{$*$}$$

Dokažimo da je $M(y - x,\, x + y + 1) = 1$. Pretpostavimo suprotno, neka je p neki zajednički prosti djelitelj brojeva $y - x$ i $x + y + 1$. Iz prethodne jednadžbe zaključujemo da $p \mid x^3$ iz čega slijedi da $p \mid x$. Sada imamo:

$$p \mid y - x, \quad p \mid x + y + 1, \quad p \mid x \quad \Longrightarrow \quad p \mid (x + y + 1) - (y - x) - 2x = 1,$$

što znači da nam je pretpostavka bila kriva i da su $y - x$ i $x + y + 1$ relativno prosti brojevi čiji je umnožak x^3 pa je onda svaki od njih kub nekog cijelog broja. Nadalje, $x^3 > 0$ i $x + y + 1 > 0$ pa je i $y - x > 0$, što znači da su $y - x$ i $x + y + 1$ kubovi prirodnih brojeva. Označimo:

$$\begin{aligned} y - x &= a^3 \\ x + y + 1 &= b^3. \end{aligned}$$

Primijetimo da iz činjenice da je $2x + 1 > 0$ slijedi da je $y - x < x + y + 1$, odnosno $a < b$, tj. $b - a \geqslant 1$.

Oduzimanjem prethodne dvije jednadžbe dobijemo $2x + 1 = b^3 - a^3$, a iz $(*)$ slijedi da je $x = ab$. Dakle, vrijedi:

$$2ab + 1 = b^3 - a^3.$$

Sada imamo:

$$2ab + 1 = b^3 - a^3 = (b - a)\left(a^2 + ab + b^2\right) \geqslant a^2 + ab + b^2 \overset{\text{A–G}}{\geqslant} 3ab,$$

odnosno $ab \leqslant 1$, što očito nije moguće jer su a i b različiti prirodni brojevi.

Stoga, jedina rješenja dane jednadžbe su parovi $(0,\, 0)$ i $(0,\, -1)$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor IMO ekipe

14. svibnja 2011.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$f(f(a) + f(b)) = a + b - 1.$$

2. Svaka strana i svaka dijagonala nekog konveksnog n-terokuta obojana je u neku od k boja. Poznato je da ne postoji jednobojna zatvorena izlomljena linija kojoj su vrhovi također i vrhovi danog mnogokuta. Kolika je najveća moguća vrijednost broja n?

3. Neka je k upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC sa središtem u točki I, a k_c pripisana kružnica istog trokuta nasuprot kuta $\angle BCA$. Ako je točka D diralište stranice $\overline{AB}$ i kružnice k_c, a točka S sjecište pravca DI s kružnicom k_c (različito od točke D), dokaži da je pravac DI simetrala kuta $\angle ASB$.

4. Nađi (jedan) cijeli broj a takav da za polinom $P(x) = x^5 + ax$ tvrdnja

$$\text{" ako } n \mid P(k) - P(l) \text{ onda } n \mid k - l, \text{ za sve } k, l \in \mathbb{Z} \text{ "}$$

vrijedi samo za konačno mnogo prirodnih brojeva n, među kojima je i $n = 95$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor IMO ekipe

Rješenja zadataka

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$f(f(a) + f(b)) = a + b - 1.$$

Rješenje.

Uvrstimo li $b = 1$ u zadanu jednadžbu, dobijemo da je

$$f(f(a) + f(1)) = a,$$

za svaki cijeli broj a.

Neka je n proizvoljni cijeli broj. Uvrstimo sada $a = f(n) + f(1)$ i $b = 2f(1)$. Tada je $f(a) = n$ i $f(b) = 1$ pa vrijedi:

$$f(n + 1) = f(n) + 3f(1) - 1.$$

Indukcijom lako dokažemo da za svaki cijeli broj n vrijedi

$$f(n) = (3n - 2)c - n + 1,$$

pri čemu smo označili $c = f(1)$.

Tada je $f(0) = -2c + 1$ pa uvrštavanjem $a = 0$ i $b = 1$ u početni izraz redom imamo:

$$\begin{aligned} f(f(0) + f(1)) &= 0 \\ f(-c + 1) &= 0 \\ [3(-c + 1) - 2]c - (-c + 1) + 1 &= 0 \\ c(-3c + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Zbog činjenice da je $c \in \mathbb{Z}$ zaključujemo da je $c = 0$. Dakle, jedino rješenje dane jednadžbe je $f(n) = -n + 1$. Izravnim uvrštavanjem se provjeri da ta funkcija zaista zadovoljava danu jednadžbu.

Zadatak 2.

Svaka strana i svaka dijagonala nekog konveksnog n-terokuta obojana je u neku od k boja. Poznato je da ne postoji jednobojna zatvorena izlomljena linija kojoj su vrhovi također i vrhovi danog mnogokuta. Kolika je najveća moguća vrijednost broja n?

Rješenje.

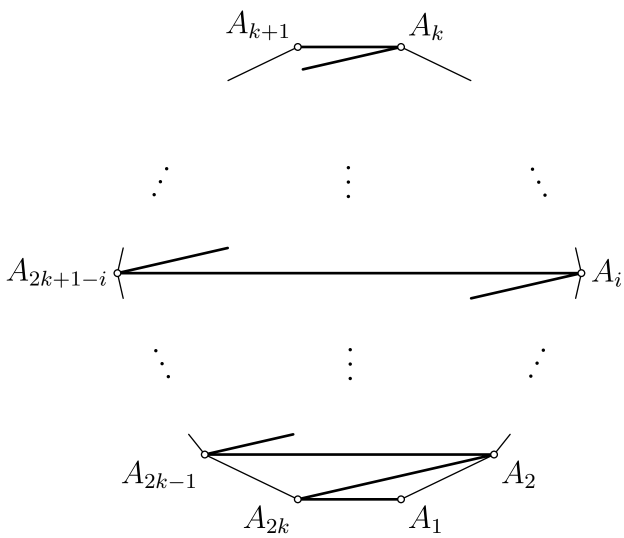
Poznato je da graf s n vrhova koji ne sadrži ciklus ima najviše $n-1$ bridova. Ta se činjenica lako dokazuje indukcijom po broju vrhova n. Stoga, najviše $n-1$ bridova (tj. stranica i dijagonala) može biti obojano istom bojom.

Budući da je broj boja k, a ukupan broj bridova (tj. stranica i dijagonala) jednak $\frac{n(n-1)}{2}$, zaključujemo da je

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqslant (n-1)\,k, \quad \text{tj. } n \leqslant 2k.$$

Pokažimo da za svaki prirodni broj k možemo obojati stranice i dijagonale pravilnog $2k$-terokuta s k boja tako da ne postoji jednobojna zatvorena izlomljena linija (bez smanjenja općenitosti možemo promatrati pravilan mnogokut jer je bitno samo koji su bridovi kako obojani). Štoviše, pokazat ćemo da svakom od k boja možemo obojati točno $2k-1$ stranica i dijagonala na traženi način.

Označimo vrhove pravilnog $2k$-terokuta s $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$. Obojimo jednom bojom izlomljenu liniju $A_1A_{2k}A_2A_{2k-1}\ldots A_iA_{2k+1-i}\ldots A_kA_{k+1}$, $2 \leqslant i \leqslant k$, kako je prikazano na sljedećoj slici.



Svakom sljedećom bojom j, $j \in \{2, \ldots, k\}$ bojimo izlomljenu liniju dobivenu rotacijom spomenute za kut $\frac{j\pi}{k}$ oko središta mnogokuta. Tako dobivene izlomljene linije međusobno su disjunktne jer bi inače neka dijagonala ostala neobojana, a to nije moguće.

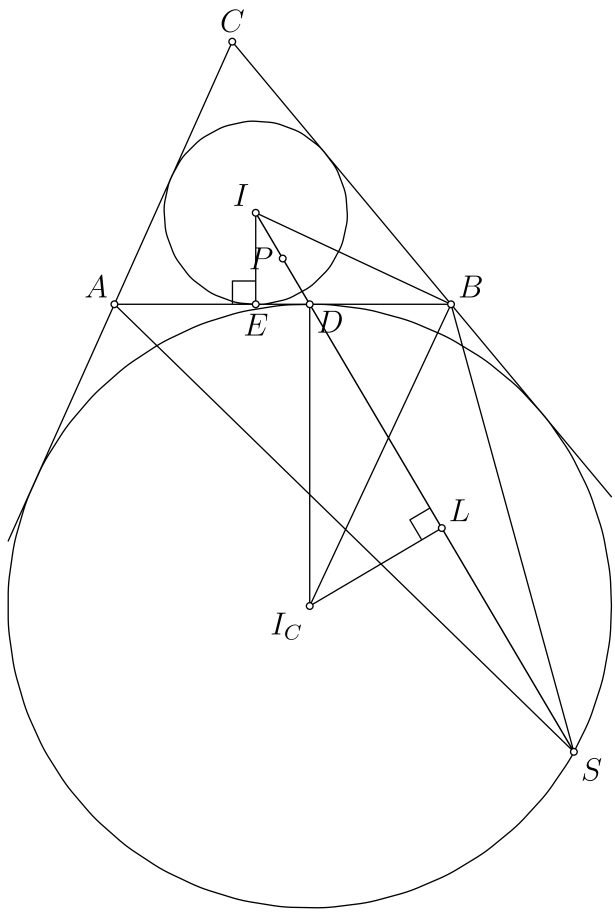
Dakle, najveća moguća vrijednost broja n je $2k$.

Zadatak 3.

Neka je k upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC sa središtem u točki I, a k_c pripisana kružnica istog trokuta nasuprot kuta $\angle BCA$. Ako je točka D diralište stranice $\overline{AB}$ i kružnice k_c, a točka S sjecište pravca DI s kružnicom k_c (različito od točke D), dokaži da je pravac DI simetrala kuta $\angle ASB$.

Prvo rješenje.

Neka je točka P polovište dužine $\overline{DI}$, a točka E diralište kružnice k i dužine $\overline{AB}$. Kako su dirališta pripisane i opisane kružnice simetrična u odnosu na polovište stranice, točka P leži na simetrali stranice $\overline{AB}$. Stoga je $|AP| = |PB|$.



Neka je L polovište dužine $\overline{SD}$, a točka I_C središte kružnice k_c. Lako se vidi da su pravokutni trokuti IED i DLI_C slični pa vrijedi

$$|DI| : |IE| = |DI_C| : |DL|,$$

odnosno $r \cdot r_C = |DI| \cdot |DL| = |PD| \cdot |DS|$.

S druge strane, kako su pravci BI i BI_C međusobno okomiti, trokuti IEB i BDI_C su slični. Zato vrijedi

$$|BE| : |EI| = |I_CD| : |DB|,$$

odnosno $r \cdot r_C = |BE| \cdot |DB|$.

Kako je $|BE| = |AD|$, dobivamo

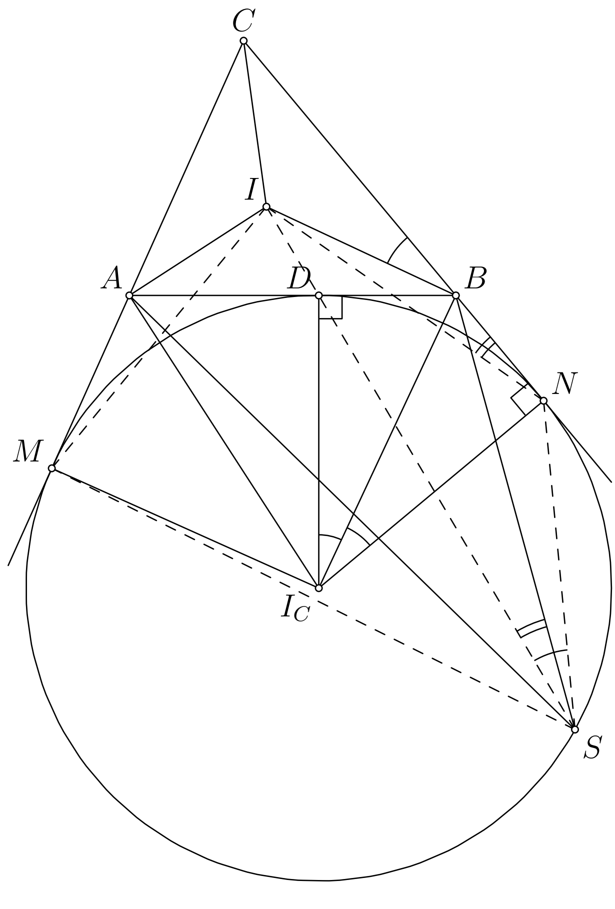
$$|PD| \cdot |DS| = r \cdot r_C = |BE| \cdot |DB| = |AD| \cdot |DB|$$

iz čega zaključujemo da je četverokut $PASB$ tetivan.

Konačno, zbog $|AP| = |PB|$ slijedi $\sphericalangle ASP = \sphericalangle PSB$.

Drugo rješenje.

Neka je I_C središte pripisane kružnice k_c i neka su točke M i N dirališta kružnice k_c i pravaca AC i BC redom. Označimo $\sphericalangle ABC = 2x$.



Budući da je $\sphericalangle EDB = \sphericalangle ENB = 90°$, četverokut $ENBD$ je tetivan i vrijedi $\sphericalangle DEN = 180° - \sphericalangle DBN = 2x$. Nad tetivom $\overline{DN}$ kružnice k_c imamo:

$$\sphericalangle ISN = \sphericalangle DSN = \frac{1}{2} \sphericalangle DEN = x,$$

a kako je $\sphericalangle IBN = 180° - x$, zaključujemo da je četverokut $ISNB$ tetivan.

Analogno se može pokazati da je četverokut $ISMA$ tetivan.

Stoga je $\sphericalangle ISB = \sphericalangle INB$ i $\sphericalangle ISA = \sphericalangle IMA$.

S obzirom da je $|CN| = |CM|$, a CI je simetrala kuta $\sphericalangle NCM$ trokuti INC i IMC su sukladni, pa vrijedi $\sphericalangle INB = \sphericalangle IMA$, čime je tvrdnja dokazana.

Treće rješenje.

Neka su a, b i c duljine stranica danog trokuta i s njegov poluopseg. Neka je, kao na slici $a > b$.

Primjenom kosinusovog poučka na trokute ADS i BDS dobivamo

$$|AS|^2 = |AD|^2 + |DS|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |DS| \cdot \cos\sphericalangle ADS,$$

$$|BS|^2 = |BD|^2 + |DS|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |DS| \cdot \cos\sphericalangle BDS.$$

Kako je $\sphericalangle IDE = \sphericalangle BDS = 180^\circ - \sphericalangle ADS$, i $\cos\sphericalangle IDE = \dfrac{|DE|}{|ID|}$ vrijedi

$$\cos\sphericalangle ADS = -\frac{|DE|}{|ID|} \quad \text{i} \quad \cos\sphericalangle BDS = \frac{|DE|}{|ID|}.$$

Vrijedi $|AE| = |DB| = s-a$ i $|AD| = |BE| = s-b$ pa je $|DE| = (s-b)-(s-a) = a-b$. Stoga je

$$|AS|^2 = (s-b)^2 + |DS|^2 + 2 \cdot (s-b) \cdot |DS| \cdot \frac{a-b}{|ID|},$$

$$|BS|^2 = (s-a)^2 + |DS|^2 - 2 \cdot (s-a) \cdot |DS| \cdot \frac{a-b}{|ID|}.$$

Odredimo još DS.
Potencija točke I u odnosu na kružnicu k_C iznosi $|IS| \cdot |ID|$ odnosno $|II_C|^2 - r_C^2$.

Odatle slijedi

$$|ID| \cdot (|ID| + |DS|) = |II_C|^2 - r_c^2,$$

pa je

$$|DS| = \frac{1}{|ID|}\left(|II_C|^2 - r_c^2 - |ID|^2\right).$$

Pritom je $|II_C|^2 = (r + r_C)^2 + |DE|^2$.

Zato je

$$|DS| = \frac{1}{|ID|}\left((r + r_C)^2 + |DE|^2 - r_C^2 - (r^2 + |DE|^2)\right) = \frac{2rr_C}{|ID|}.$$

Vrijedi $r_C = \dfrac{rs}{s-c}$, a izjednačavanjem izraza za površinu trokuta dobivamo

$$r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Zato je $r^2s = (s-a)(s-b)(s-c)$, $rr_C = (s-a)(s-b)$ i $|DS| = \dfrac{2(s-a)(s-b)}{|ID|}$.

Računamo

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{|AS|}{|BS|}\right)^2 &= \frac{(s-b)^2 + |DS|^2 + 2\cdot(s-b)\cdot|DS|\cdot\frac{a-b}{|ID|}}{(s-a)^2 + |DS|^2 - 2\cdot(s-a)\cdot|DS|\cdot\frac{a-b}{|ID|}} \\
&= \frac{(s-b)^2 + \left(\frac{2(s-a)(s-b)}{|ID|}\right)^2 + 2\cdot(s-b)\cdot\frac{2(s-a)(s-b)}{|ID|}\cdot\frac{a-b}{|ID|}}{(s-a)^2 + \left(\frac{2(s-a)(s-b)}{|ID|}\right)^2 - 2\cdot(s-a)\cdot\frac{2(s-a)(s-b)}{|ID|}\cdot\frac{a-b}{|ID|}} \\
&= \frac{(s-b)^2\big(|ID|^2 + 4(s-a)\left((s-a)+(a-b)\right)\big)}{(s-a)^2\big(|ID|^2 + 4(s-b)\left((s-b)-(a-b)\right)\big)} \\
&= \frac{(s-b)^2\big(|ID|^2 + 4(s-a)(s-b)\big)}{(s-a)^2\big(|ID|^2 + 4(s-b)(s-a)\big)} \\
&= \frac{(s-b)^2}{(s-a)^2} = \left(\frac{|AD|}{|BD|}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Sada iz $|AS| : |BS| = |AD| : |BD|$ po obratu teorema o simetrali kuta slijedi da je $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSD$ što je i trebalo pokazati.

Zadatak 4.

Nađi (jedan) cijeli broj a takav da za polinom $P(x) = x^5 + ax$ tvrdnja

$$\text{” ako } n \mid P(k) - P(l) \text{ onda } n \mid k - l, \text{ za sve } k, l \in \mathbb{Z} \text{ ”}$$

vrijedi samo za konačno mnogo prirodnih brojeva n, među kojima je i $n = 95$.

Rješenje.

Jedan takav broj je $a = -95^4$.

Za taj a vrijedi $P(95) = P(0) = 0$, pa n dijeli $P(95) - P(0)$ za svaki prirodan broj n i n ne dijeli $95 - 0$ ako n nije djelitelj broja 95. Zato tvrdnja iz zadatka vrijedi samo za konačno mnogo prirodnih brojeva n.

Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 95$. Neka su $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da $95 \mid P(k) - P(l)$. Budući da $95 \mid a$ zaključujemo da $95 \mid k^5 - l^5$. Želimo pokazati da $95 \mid k - l$, pa je dovoljno pokazati da $5 \mid k - l$ i $19 \mid k - l$.

Prema Malom Fermatovom teoremu vrijedi $k^5 \equiv k \pmod 5$ i $l^5 \equiv l \pmod 5$, pa zaključujemo da $5 \mid k - l$ jer $5 \mid k^5 - l^5$.

Također, prema Malom Fermatovom teoremu ako je k relativno prost s 19 vrijedi $k^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, pa je $k^{54} = (k^{18})^3 \equiv 1 \pmod{19}$. Zato vrijedi $k^{55} \equiv k \pmod{19}$ bez obzira je li k djeljiv s 19 ili nije. Analogno $l^{55} \equiv l \pmod{19}$. Zaključujemo da je $k \equiv (k^5)^{11} \equiv (l^5)^{11} \equiv l \pmod{19}$, tj. $19 \mid k - l$, što je i trebalo dokazati.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor MEMO ekipe

14. svibnja 2011.

1. Odredi sve nizove $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} - 200.$$

2. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Odredi minimalni broj točaka koje treba označiti unutar bilo kojeg konveksnog n-terokuta tako da svaki trokut kojem su vrhovi ujedno vrhovi tog n-terokuta sadrži u svojoj unutrašnjosti barem jednu označenu točku.

3. Unutar šiljastokutnog trokuta ABC dana je točka S takva da je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBC = \sphericalangle SCA$. Pravci AS, BS, CS sijeku redom kružnice opisane trokutima SBC, SCA, SAB u točkama A_1, B_1, C_1. Dokaži nejednakost

$$P(A_1CB) + P(B_1AC) + P(C_1BA) \geqslant 3P(ABC).$$

4. Za prirodan broj n promatramo skup

$$S = \{0,\ 1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots,\ 1+2+3+...+(n-1)\}.$$

   a) Ako je n potencija broja 2, dokaži da svi elementi od S daju različite ostatke pri dijeljenju s n.

   b) Ako n nije potencija broja 2, dokaži da postoje dva elementa od S koja daju isti ostatak pri dijeljenju s n.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor MEMO ekipe

Rješenja zadataka

Zadatak 1.

Odredi sve nizove $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} - 200.$$

Rješenje.

Oduzimanjem jednakosti

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= a_{n+2}a_{n+3} - 200 \\ a_{n+1} + a_{n+2} &= a_{n+3}a_{n+4} - 200 \end{aligned}$$

dobivamo

$$a_n - a_{n+2} = a_{n+3}\left(a_{n+2} - a_{n+4}\right). \tag{$*$}$$

Kako je $a_{n+3} > 0$, vrijedi

$$\begin{array}{lcl} a_n > a_{n+2} & \text{ako i samo ako} & a_{n+2} > a_{n+4} \\ a_n = a_{n+2} & \text{ako i samo ako} & a_{n+2} = a_{n+4} \\ a_n < a_{n+2} & \text{ako i samo ako} & a_{n+2} < a_{n+4} \end{array}$$

U prvom slučaju slijedilo bi $a_n > a_{n+2} > a_{n+4} > \ldots$ te bi stoga morao postojati član niza manji od 1. Kontradikcija.

Zato mora biti:

$$a_n = a_{n+2} \text{ za sve neparne } n \qquad \text{ili} \qquad a_n < a_{n+2} \text{ za sve neparne } n$$

te

$$a_n = a_{n+2} \text{ za sve parne } n \qquad \text{ili} \qquad a_n < a_{n+2} \text{ za sve parne } n$$

Dakle trebamo razmotriti četiri mogućnosti

1. $a_n < a_{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$

   Tada postoji n takav da je $a_{n+2} > 15$ i $a_{n+3} > 15$, pa vrijedi $\left(a_{n+2} - 1\right)\left(a_{n+3} - 1\right) \geqslant 225 > 201$ i tada je

   $$a_n + a_{n+1} < a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+3} - \left(a_{n+2} - 1\right)\left(a_{n+3} - 1\right) + 1 < a_{n+2}a_{n+3} - 200.$$

   Kontradikcija.

2. $a_n = a$ za sve neparne n i $a_n = b$ za sve parne n

   Iz danog uvjeta dobivamo jednadžbu $a+b = ab-200$ koju možemo zapisati u obliku $(a-1)(b-1) = 201 = 3 \cdot 67$. Rješenja su $(a, b) \in \{(2, 202), (202, 2), (4, 68), (68, 4)\}$.

3. $a_n = a$ za sve neparne n i $a_n < a_{n+2}$ za sve parne n

   Tada je prema $(*)$

$$a_4 - a_2 = a(a_6 - a_4) = a^2(a_8 - a_6) = \ldots = a^{m-1}(a_{2m+2} - a_{2m}) = \ldots$$

   što je moguće samo ako je $a = 1$.

   Označimo $d = a_4 - a_2$. Tada je $a_{2m+2} - a_{2m} = d$ za sve $m \in \mathbb{N}$, pa je $a_{2m} = a_2 + (m-1)d$. Iz polaznog uvjeta dobijemo da je $d = 201$.

   Za $b \in \mathbb{Z}$ niz $1, b, 1, b+201, 1, b+402, 1, \ldots$ zadovoljava dani uvjet.

4. $a_n < a_{n+2}$ za sve neparne n i $a_n = b$ za sve parne n

   Analogno kao u prethodnom slučaju dobivamo rješenje

$$a,\ 1,\ a+201,\ 1,\ a+402,\ 1,\ \ldots \qquad \text{gdje je } a \in \mathbb{Z}.$$

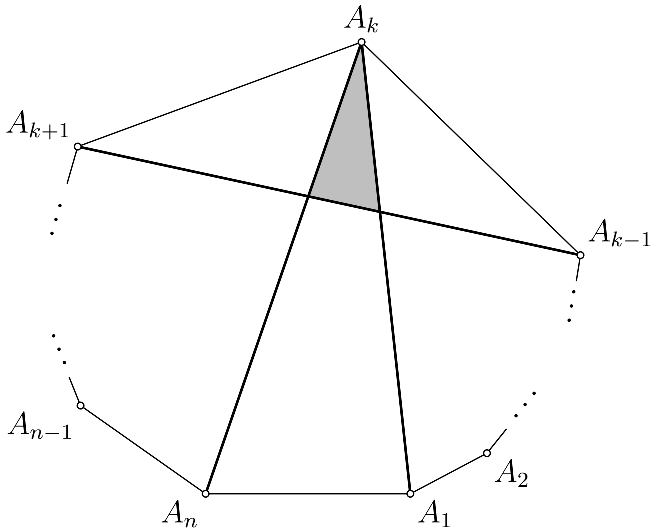
Zadatak 2.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Odredi minimalni broj točaka koje treba označiti unutar bilo kojeg konveksnog n-terokuta tako da svaki trokut kojem su vrhovi ujedno vrhovi tog n-terokuta sadrži u svojoj unutrašnjosti barem jednu označenu točku.

Rješenje.

Budući da dijagonale iz jednog vrha dijele n-terokut na $n-2$ disjunktna trokuta potrebno je označiti najmanje $n-2$ točke.

Tvrdimo da je moguće odabrati $n-2$ točke tako da je zadovoljen uvjet iz zadatka. Označimo vrhove danog n-terokuta s $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nacrtajmo sve dijagonale danog mnogokuta i obojimo područja određena dijagonalama A_1A_k, A_kA_n i $A_{k-1}A_{k+1}$ za svaki $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.



Označimo li iz svakog obojanog područja po jednu točku svaki trokut kojem su vrhovi ujedno vrhovi tog n-terokuta će sadržavati u svojoj unutrašnjosti barem jednu označenu točku. Zaista, trokut $A_lA_kA_m$ za bilo koje $1 \leqslant l < k < m \leqslant n$ sadrži čitavo obojano područje određeno dijagonalama A_1A_k, A_kA_n i $A_{k-1}A_{k+1}$, pa i pripadnu označenu točku.

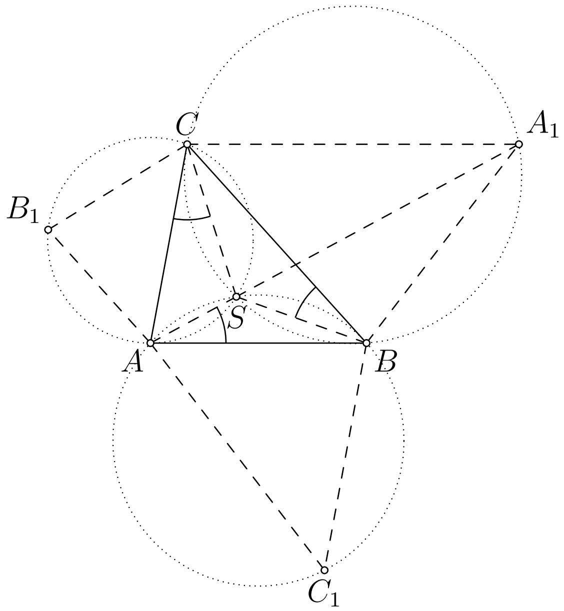
Zadatak 3.

Unutar šiljastokutnog trokuta ABC dana je točka S takva da je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBC = \sphericalangle SCA$. Pravci AS, BS, CS sijeku redom kružnice opisane trokutima SBC, SCA, SAB u točkama A_1, B_1, C_1. Dokaži nejednakost

$$P(A_1CB) + P(B_1AC) + P(C_1BA) \geqslant 3P(ABC).$$

Rješenje.

Označimo $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBC = \sphericalangle SCA = \varphi$, a kutove danog trokuta s α, β, γ.



Kako je $\sphericalangle CSA_1$ vanjski kut trokuta ACS vrijedi

$$\sphericalangle CSA_1 = \sphericalangle CAS + \sphericalangle SCA = \sphericalangle CAS + \varphi = \sphericalangle CAS + \sphericalangle SAB = \sphericalangle CAB = \alpha.$$

Analogno je $\sphericalangle ASB_1 = \beta$ i $\sphericalangle BSC_1 = \gamma$.

Zato je $\sphericalangle CBA_1 = \sphericalangle CSA_1 = \alpha$ i $\sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle BSA_1 = \sphericalangle B_1SA = \beta$ pa je $\triangle BCA_1 \sim \triangle ABC$. Analogno, $\triangle B_1CA \sim \triangle ABC$ i $\triangle BC_1A \sim \triangle ABC$.

Zato vrijedi

$$\frac{P(BCA_1)}{P(ABC)} = \left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

i analogno $\dfrac{P(B_1CA)}{P(ABC)} = \dfrac{b^2}{a^2}$ i $\dfrac{P(BC_1A)}{P(ABC)} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

Konačno,

$$\begin{aligned} P(A_1CB) + P(B_1AC) + P(C_1BA) &= \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) P(ABC) \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2}}\, P(ABC) = 3P(ABC). \end{aligned}$$

Zadatak 4.

Za prirodan broj n promatramo skup

$$S = \{0,\ 1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots,\ 1+2+3+...+(n-1)\}.$$

a) Ako je n potencija broja 2, dokaži da svi elementi od S daju različite ostatke pri dijeljenju s n.

b) Ako n nije potencija broja 2, dokaži da postoje dva elementa od S koja daju isti ostatak pri dijeljenju s n.

Rješenje.

Neka su k, l takvi da vrijedi $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$. Sume $1+2+\ldots+k$ i $1+2+\ldots+l$ daju isti ostatak pri dijeljenju s n ako i samo ako vrijedi

$$\frac{1}{2}\,k\,(k+1) \equiv \frac{1}{2}\,l\,(l+1) \pmod{n}$$

odnosno ako i samo ako je broj $l(l+1)-k(k+1)=(l-k)(l+k+1)$ djeljiv s $2n$.

Uočimo da su brojevi $l-k$ i $l+k+1$ različite parnosti.

a) Neka je $n=2^m$. Tada je $2n=2^{m+1}$, a kako su $l-k$ i $l+k+1$ različite parnosti, jedan od njih mora biti djeljiv s 2^{m+1}.

   S druge strane, očito je $l-k<2^{m+1}$, a vrijedi i $l+k+1 \leqslant 2l < 2n = 2^{m+1}$, pa nijedan od tih brojeva nije djeljiv s 2^{m+1}.

   Zaključujemo da različiti elementi skupa S daju različite ostatke pri dijeljenju s n.

b) Neka je $n=2^m s$ pri čemu je $s>1$ neparan.

   Trebamo odabrati k i l, $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$ tako da vrijedi

$$(l-k)(l+k+1) = 2n = 2^{m+1}s.$$

   Ako je $2^{m+1} \geqslant s+1$ odabrat ćemo ih tako da bude $l+k+1=2^{m+1}$ i $l-k=s$, a ako je $2^{m+1} \leqslant s-1$ onda tako da je $l+k+1=s$ i $l-k=2^{m+1}$.

   U prvom slučaju rješavanjem sustava dobijemo $l=2^m+\dfrac{s-1}{2}$ i $k=2^m-\dfrac{s+1}{2}$. Jasno je da je $0 \leqslant k < l$. Kako je $2<s \leqslant 2^{m+1}-1$, vrijedi

$$l = 2^m + \frac{s-1}{2} \leqslant 2^m + \frac{2^{m+1}-2}{2} = 2^{m+1}-1 < 2^m s - 1.$$

   U drugom slučaju dobijamo $l=\dfrac{s-1}{2}+2^m$ i $k=\dfrac{s-1}{2}-2^m$. I sada je jasno da je $0 \leqslant k < l$ pa još provjeravamo

$$l = \frac{s-1}{2} + 2^m \leqslant \frac{s-1}{2} + \frac{s-1}{2} = s-1 \leqslant 2^m s - 1.$$