HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 14. travnja 2014.

Zadatak 1.

Dan je realni broj $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Dokaži da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost:

$$x(x-y)(\alpha x-y)+y(y-z)(\alpha y-z)+z(z-x)(\alpha z-x) \geqslant 0.$$

Rješenje.

Dana nejednakost se može zapisati u sljedećem obliku:

$$\alpha(x^3+y^3+z^3-x^2y-y^2z-z^2x) \geqslant x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2.$$

Koristeći teorem o mononotom preuređenju vektora slijedi da je lijeva strana prethodne nejednakosti pozitivna. Zato je dovoljno dokazati željenu nejednakost za $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$x^3+y^3+z^3+2(xy^2+yz^2+zx^2) \geqslant 3(x^2y+y^2z+z^2x). \tag{1}$$

Budući da je nejednakost ciklička, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z \leqslant x$ i $z \leqslant y$. Neka su $a, b \geqslant 0$ realni brojevi takvi da je $x = z + a$, $y = z + b$. Nejednakost (1) se može zapisati na sljedeći način:

$$a^3-3a^2b+2ab^2+b^3+2z(a^2-ab+b^2) \geqslant 0.$$

Koristeći A–G nejednakost dobivamo:

$$a^2-ab+b^2 \geqslant ab \geqslant 0.$$

Dakle, dovoljno je dokazati:

$$a^3+2ab^2+b^3-3a^2b \geqslant 0.$$

No, ta nejednakost se može zapisati ovako:

$$\begin{aligned} a^3-4a^2b+4ab^2+a^2b-2ab^2+b^3 &\geqslant 0, \\ a(a^2-4ab+4b^2)+b(a^2-2ab+b^2) &\geqslant 0, \\ a(a-2b)^2+b(a-b)^2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

što očito vrijedi.

Zadatak 2.

Dan je prirodni broj $M \geqslant 3$. Kažemo da je pravilni mnogokut *sjajno* obojan ako su sve njegove stranice i dijagonale obojane u točno M boja tako da ne postoje tri vrha tog mnogokuta koja određuju trokut čije su stranice obojane u točno dvije boje.

Neka je N najveći prirodni broj takav da postoji sjajno obojani pravilni mnogokut s točno N vrhova.

a) Dokaži da je $N \leqslant (M-1)^2$.

b) Ako je $M-1$ prosti broj, dokaži da postoji sjajno obojani pravilni mnogokut s točno $(M-1)^2$ vrhova.

Rješenje.

a) Neka je brid stranica ili dijagonala mnogokuta. Promotrimo proizvoljan vrh X_0 mnogokuta koji je sjajno obojan. Tvrdimo da za svaku boju postoji najviše $M-2$ bridova koji izlaze iz vrha X_0 u toj boji. Zaista, pretpostavimo da je X_0 povezan s vrhovima $X_1, X_2, \ldots, X_{M-1}$ bridovima iste boje, recimo C. Neka je Y vrh spojen s vrhom X_0 bilo kojom bojom različitom od C. Takav vrh postoji jer bi inače svi bridovi bili boje C. Vrh Y mora biti povezan s vrhovima $X_1, \ldots, X_n$ bridom koji ima različitu boju od C. Budući da je ukupno $M-1$ boja različitih od C, postoje dva vrha X_i i X_j koji su s Y povezani istom bojom, što je kontradikcija jer bi tada YX_iX_j imao stranice obojane u točno dvije boje.

Dakle, broj bridova koji izlaze iz jednog vrha sjajno obojanog mnogokuta je $N-1 \leqslant M \cdot (M-2)$, što povlači $N \leqslant (M-1)^2$.

b) Neka je $p = M-1$ prost broj i označimo p^2 vrhova parovima (i,j) za $i,j \in \{0,1,\ldots,p-1\}$. Označimo boje brojevima $0,1,\ldots,p$.

Obojimo brid između vrhova (i_1,j_1) i (i_2,j_2) bojom $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ ako i samo ako je $j_1 - j_2 \equiv (i_1 - i_2)k \pmod p$ te u boju p ako i samo ako je $i_1 = i_2$.

Budući da je p prost, slijedi da je bojanje dobro definirano. Zaista, za različite parove (i_1,j_1) i (i_2,j_2) ako je $j_1 - j_2 \equiv (i_1-i_2)k \equiv (i_1-i_2)l \pmod p$ za boje k i l, onda p dijeli $(i_1-i_2)(k-l)$ i $i_1 \neq i_2$ povlači $k = l$. Ako je $i_1 = i_2$, onda $j_1 - j_2 \equiv (i_1-i_2)k = 0 \pmod p$ povlači $j_1 = j_2$, pa to nije moguće i u tom slučaju brid između (i_1,j_1) i (i_2,j_2) ima boju p.

Neka su (i_1,j_1), (i_2,j_2) i (i_3,j_3) tri vrha trokuta tako da brid između (i_1,j_1) i (i_2,j_2) te brid između (i_2,j_2) i (i_3,j_3) imaju istu boju, na primjer k. Za $0 \leqslant k \leqslant p-1$, imamo

$$j_1 - j_3 = (j_1 - j_2) + (j_2 - j_3) \equiv (i_1 - i_2)k + (i_2 - i_3)k = (i_1 - i_3)k \pmod p,$$

a za $k = p$ imamo $i_1 = i_2 = i_3$. U svakom slučaju, brid između (i_1,j_1) i (i_3,j_3) je također obojan u boju k, pa je mnogokut sjajno obojan.

Zadatak 3.

Dan je trokut ABC u kojem je $|AB| > |AC|$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$, a S točka u kojoj simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe tu stranicu. Paralela s pravcem AS kroz točku P siječe pravce AB i AC redom u točkama X i Y. Neka je Z točka takva da je Y polovište dužine $\overline{XZ}$ te neka se pravci BY i CZ sijeku u točki D.

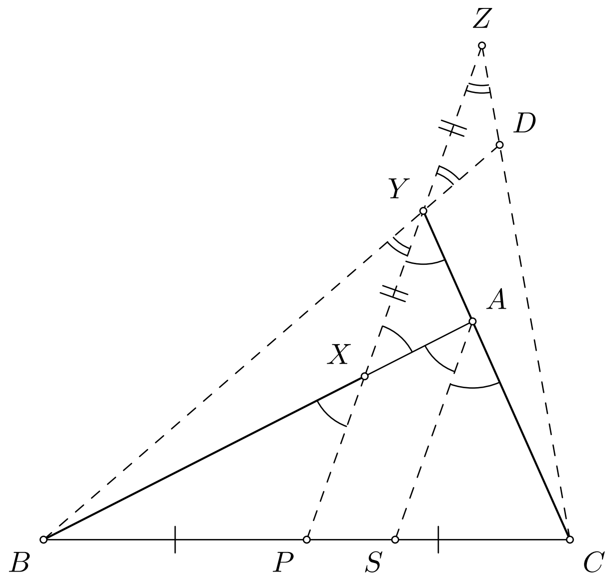
Dokaži da je simetrala kuta $\sphericalangle BDC$ paralelna s pravcem AS.

Rješenje.

Kako je

$$\frac{|BX|}{|BP|} = (\text{sličnost}) = \frac{|BA|}{|BS|} = (\text{simetrala kuta}) = \frac{|AC|}{|SC|} = (\text{sličnost}) = \frac{|YC|}{|PC|},$$

zbog $|BP| = |PC|$ zaključujemo da vrijedi $|BX| = |YC|$.



Nije teško uočiti da vrijedi:

$$\sphericalangle AYX = \sphericalangle CAS = \sphericalangle BAS = \sphericalangle BXP = \sphericalangle AXY.$$

Prema uvjetima zadatka vrijedi i $|XY| = |YZ|$.

Sada prema SKS teoremu o sukladnosti trokuta zaključujemo da je $\triangle BXY \cong \triangle CYZ$.

To znači da je $\sphericalangle BYP = \sphericalangle PZC$, odnosno $\sphericalangle DYZ = \sphericalangle DZY$. Kako je $\sphericalangle DYZ + \sphericalangle DZY = \sphericalangle BDC$, slijedi da je simetrala kuta $\sphericalangle BDC$ paralelna s pravcem ZP, pa stoga i s pravcem AS.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (p, q) prostih brojeva za koje je broj

$$p^{q+1} + q^{p+1}$$

potpuni kvadrat.

Rješenje.

Za $p = q = 2$ imamo $p^{q+1} + q^{p+1} = 2^3 + 2^3 = 16$, pa je $(2, 2)$ jedan dobar par.

Pretpostavimo sad da je barem jedan od p i q neparan i bez smanjenja općenitosti neka je to p. Neka je $p^{q+1} + q^{p+1} = x^2$, gdje je $x \in \mathbb{N}$. $p + 1$ je paran pa možemo pisati

$$p^{q+1} = (x - q^{\frac{p+1}{2}})(x + q^{\frac{p+1}{2}}).$$

Označimo s d najveći zajednički djelitelj faktora na desnoj strani. Ako je $d > 1$, onda d mora biti potencija od p i d je ujedno djelitelj od $2x$. Lako se vidi da tada $p \mid q$, pa je $p = q$. Sad dobijemo da je $2p^{p+1} = x^2$ što je nemoguće.
Stoga je $d = 1$, $x - q^{\frac{p+1}{2}} = 1$, $x + q^{\frac{p+1}{2}} = p^{q+1}$ i

$$2q^{\frac{p+1}{2}} = p^{q+1} - 1.$$

Gornja jednadžba ne može vrijediti za neparne q, jer je $2q^{\frac{p+1}{2}} \equiv 2 \pmod 4$ i $p^{q+1} - 1 \equiv 0 \pmod 4$. Zaključujemo da je $q = 2$ i

$$2^{\frac{p+3}{2}} = p^3 - 1 = (p - 1)(p^2 + p + 1).$$

Zbog $M(p - 1, p^2 + p + 1) = 1$ dobijemo da je $p - 1 = 1$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je p neparan.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 15. travnja 2014.

Zadatak 1.

Neka je α realni broj. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x + \alpha + f(y)) = f(f(x)) + f(\alpha) + y.$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $x = y = -\alpha$ dobijemo

$$f(f(-\alpha)) = f(f(-\alpha)) + f(\alpha) - \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha) = \alpha.$$

Uvrštavanjem $x = -\alpha, y = \alpha$ dobijemo

$$\alpha = f(f(\alpha)) = f(f(-\alpha)) + \alpha + \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(f(-\alpha)) = -\alpha.$$

Označimo sad $f(-\alpha) = a$. Znamo da je $f(a) = -\alpha$. Uvrštavnjem $x = \alpha, y = a$ dobijemo

$$\alpha = 2\alpha + a \quad \Longrightarrow \quad a = -\alpha.$$

Na kraju uvrštavnjem $y = -\alpha$ dobijemo

$$f(x) = f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

a uvrštavnjem $x = -\alpha$ dobijemo

$$f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Slijedi da je

$$f(x) = f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Provjerom se vidi da je to zaista rješenje.

Zadatak 2.

Neka je $N \geqslant 3$ neparni prirodni broj. Na početku se u svakom polju tablice $N \times N$ nalazi broj 0. U pojedinom potezu biraju se dva polja koja imaju zajedničku stranicu i zatim se oba broja u tim poljima povećaju za 1 ili se oba broja smanje za 1.

Ako su nakon K poteza zbrojevi brojeva u svakom retku i svakom stupcu tablice međusobno jednaki, dokaži da je K paran broj.

Rješenje.

U svakom potezu zbroj svih brojeva se poveća ili smanji za dva, pa zbroj uvijek ostaje paran. Pretpostavimo da jsu nakon K poteza zbrojevi brojeva u svakom retku i svakom stupcu međusobno jednaki i označimo ga sa S. Zbroj svih brojeva je tada jednak $N \cdot S$. Budući da je to paran broj, a N je neparan, zaključujemo da je S paran broj.

Primijetimo da se u svakom potezu promijeni parnost sume u dva susjedna retka ili dva susjedna stupca. Prvo promotrimo samo one poteze koji mijenjaju parnost u dva susjedna stupca. Neka je A_i broj poteza koji mijenjaju brojeve u poljima u i-tom i $(i+1)$-vom stupcu.

Broj A_1 mora biti paran jer su to jedini potezi koji mijenjaju parnost zbroja u prvom stupcu. Broj poteza koji mijenjaju parnost zbroja u drugom stupcu također mora biti paran i iznosi $A_1 + A_2$, pa zaključujemo da je A_2 paran broj. Induktivno, zaključujemo da su svi brojevi A_i parni.

Zbog toga je ukupan broj poteza koji mijenjaju parnost u dva stupca jednak $A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}$, što je paran broj. Analogno, ukupan broj poteza koji mijenjaju parnost u dva retka je paran broj. Zaključujemo da je ukupan broj poteza također paran broj.

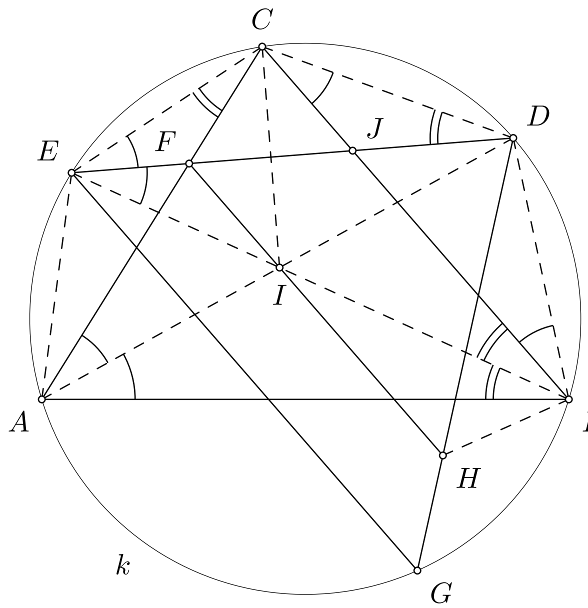
Zadatak 3.

Neka je točka I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC. Polupravci AI i BI sijeku opisanu kružnicu k trokuta ABC u točkama D i E redom. Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{CA}$ sijeku se u točki F, pravac kroz točku E paralelan s pravcem FI siječe kružnicu k još u točki G, a pravci FI i DG sijeku se u točki H.

Dokaži da pravci CA i BH dodiruju opisanu kružnicu trokuta DFH u točkama F i H redom.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, a J sjecište dužina $\overline{DE}$ i $\overline{CB}$.



Obodni kutovi $\sphericalangle BED$, $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle BAD$ nad tetivom $\overline{BD}$ su jednaki, tj. $\sphericalangle BED = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = \frac{\alpha}{2}$. Analogno dobivamo $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}$ (nad tetivom $\overline{DC}$), $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EBA = \frac{\beta}{2}$ (nad tetivom $\overline{EA}$) i $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBE = \frac{\beta}{2}$ (nad tetivom $\overline{CE}$).

Odavde je $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEC + \sphericalangle ECA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle CJE = \sphericalangle CDE + \sphericalangle BCD = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ pa je trokut CFJ jednakokračan.

S druge strane, pravci FH i EG su paralelni, odakle je $\sphericalangle DHF = \sphericalangle DGE = 180^\circ - \sphericalangle ECD = 180^\circ - (\sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD) = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ pa prema obratu teorema o kutu između tangente i tetive zaključujemo da pravac CA dodiruje opisanu kružnicu trokuta DFH u točki F.

Budući da je CI simetrala kuta $\sphericalangle FCJ$, vrijedi $CI \perp DE$. Budući da je $\sphericalangle BED = \sphericalangle DEC$, pravac DE je simetrala dužine $\overline{CI}$ i $\sphericalangle IFD = \sphericalangle DFC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. To povlači da je $\sphericalangle HFD = \sphericalangle DFC = \sphericalangle CJE = \sphericalangle BJD$. Zaključujemo da su pravci FH i BC paralelni i da je trokut DFH jednakokračan.

S obzirom da je D polovište luka $\widehat{BC}$ i da jednakokračni trokuti DCB i DFH imaju paralelne osnovice, pravac BH je osnosimetrična slika pravca CF obzirom na simetralu stranice $\overline{FH}$. Zato pravac BH također dodiruje opisanu kružnicu trokuta DFH, u točki H.

Zadatak 4.

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je najveći prosti djelitelj broja $n^4 + n^2 + 1$ jednak najvećem prostom djelitelju broja $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Rješenje.

Neka je p_n najveći prosti djelitelj od $n^4 + n^2 + 1$ i q_n najveći prosti djelitelj od $n^2 + n + 1$. Tada je $p_n = q_{n^2}$ i iz

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = ((n-1)^2 + (n-1) + 1)(n^2 + n + 1)$$

slijedi da je $p_n = \max\{q_n, q_{n-1}\}$ za sve $n \geqslant 2$. Uzimajući u obzir da je $n^2 - n + 1$ neparan, dobijemo da je

$$M(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = M(2n, n^2 - n + 1) = M(n, n^2 - n + 1) = 1,$$

i zato je $q_n \neq q_{n-1}$.

Da bi dokazali tvrdnju dovoljno je pokazati da je skup

$$S = \{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} \mid q_n > q_{n-1} \quad \text{i} \quad q_n > q_{n+1}\}$$

beskonačan, jer je za svaki $n \in S$

$$p_n = \max\{q_n, q_{n-1}\} = q_n = \max\{q_n, q_{n+1}\} = p_{n+1}.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je S konačan. Kako je $q_2 = 7 < 13 = q_3$ i $q_3 = 13 > 7 = q_4$ možemo zaključiti da je S neprazan skup. S je i konačan, pa znači da ima najveći element kojeg označimo s m.

Uočimo prvo da je nemoguće da vrijedi $q_m > q_{m+1} > q_{m+2} > \cdots$, jer su svi ti brojevi prirodni, pa mora postojati $k \geqslant m$ takav da je $q_k < q_{k+1}$ (zbog $q_k \neq q_{k+1}$). Sljedeće uočimo da je nemoguće da vrijedi $q_k < q_{k+1} < q_{k+2} < \cdots$, jer je $q_{(k+1)^2} = p_{k+1} = \max\{q_k, q_{k+1}\} = q_{k+1}$, pa označimo s l najmanji prirodan broj $\geqslant k+1$ takav da je $q_l > q_{l+1}$. Zbog minimalnosti od l vrijedi $q_{l-1} < q_l$, pa je $l \in S$. Kako je $l \geqslant k+1 > k \geqslant m$, to je kontradikcija s maksimalnošću od m, pa je S zaista beskonačan.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 27. travnja 2014.

Zadatak 1.

Dokaži da za svaki $x \in \left[\frac{1}{111}, \frac{110}{111}\right]$ možemo odabrati brojeve $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, 101$ takve da je

$$|x_{101} - x| \leqslant \frac{1}{402},$$

pri čemu je

$$x_0 = 1, \quad x_k = (x_{k-1} + 1)^{a_k}, \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, 101.$$

Rješenje.

Za prirodni broj n, neka S_n označava skup svih mogućih vrijednosti koje x_n može poprimiti za različite odabire brojeva $a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Na primjer:

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}, \quad S_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3\right\}, \quad S_3 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 4\right\}, \ \ldots$$

Primijetimo da za svaki $x \in S_n$ i broj $x + 1$ i broj $\frac{1}{x+1}$ pripadaju skupu S_{n+1}. Nadalje, jedan od ta dva broja je manji od 1, a drugi je veći od 1. Zato svaki skup S_n ima paran broj elemenata.

Za prirodni broj n, neka je

$$S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\}, \text{ with } a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m}$$

i

$$S_{n+1} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{2k}\}, \text{ with } b_1 < b_2 < \cdots < b_{2k}.$$

Sljedeće tvrdnje se mogu lako dokazati matematičkom indukcijom:

Tvrdnja 1. $m = 2^{n-1}$, $k = 2^n$ i zato $|S_{n+1}| = 2|S_n|$.

Tvrdnja 2. $a_1 = \dfrac{1}{n+1}$, $a_m = \dfrac{n}{n+1}$, $a_{m+1} = \dfrac{n+1}{n}$, $a_{2m} = n + 1$.

Tvrdnja 3. $b_1 < b_2 < \cdots < b_{2m} < 1 < b_{2m+1} < \cdots < b_{4m}$.

Tvrdnja 4. $a_i = \dfrac{1}{a_{2m+1-i}}$, $b_i = \dfrac{1}{b_{4m+1-i}}$.

Tvrdnja 5. $b_i = \dfrac{1}{1 + a_{2m+1-i}}$, za $1 \leqslant i \leqslant 2m$.

Tvrdnja 6. $b_i = \dfrac{1}{b_{2m+1-i}}$, za $1 \leqslant i \leqslant 2m$.

Koristeći Tvrdnju 5 i Tvrdnju 4 zajedno dobivamo:

$$b_i = \frac{a_i}{1 + a_i}, \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant 2m. \tag{2}$$

Za sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$, dokazat ćemo da je $a_{i+1} - a_i \leqslant \frac{1}{2n-1}$ za sve $1 \leqslant i \leqslant m$. To je očito istina za $n = 2$.

Kao pretpostavku indukcije, pretpostavimo da je ta tvrdnja točna za neki prirodan broj n. Dokazat ćemo da ta tvrdnja vrijedi i za $n+1$, tj. dokazat ćemo da je$b_{i+1} - b_i \leqslant \frac{1}{2n+1}$ za sve $1 \leqslant i \leqslant 2m$.

Koristeći (2) i Tvrdnju 2 zaključujemo da je

$$b_m = \frac{n}{2n+1}, \quad b_{m+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Zato je

$$b_{m+1} - b_m = \frac{1}{2n+1},$$

i tvrdnja vrijedi za $i = m$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $i < m$. Imamo:

$$b_{i+1} - b_i = \frac{1}{a_{i+1}+1} - \frac{1}{a_i+1} = \frac{a_{i+1} - a_i}{(1+a_i)(1+a_{i+1})}.$$

Prema pretpostavci indukcije $a_{i+1} - a_i \leqslant \frac{1}{2n-1}$, pa iz Tvrdnje 2 zaključujemo da je $a_i \geqslant \frac{1}{n+1}$ i $a_{i+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Dakle,

$$b_{i+1} - b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{(1+a_i)(1+a_{i+1})} \leqslant \frac{\frac{1}{2n-1}}{(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+1})} < \frac{1}{2n+1},$$

pri čemu je zadnja nejednakost ekvivalentna nejednakosti $2n^2 - 5 > 0$ koja očito vrijedi za sve $n \geqslant 2$. Konačno, dokazat ćemo da je $b_{i+1} - b_i \leqslant \frac{1}{2n+1}$ za $m < i < 2m$.

Iz Tvrdnje 6 slijedi

$$b_{i+1} - b_i = \frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_{j+1}} = \frac{b_{j+1} - b_j}{(1+b_j)(1+b_{j+1})} < b_{j+1} - b_j < \frac{1}{2n+1}.$$

gdje je $j = 2m - i < m$.

Za $n = 101$, neka je $S_{101} = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$, gdje je $c_1 < c_2 < \cdots < c_s$.

Budući da je $c_1 = \frac{1}{102}$ i $c_s = \frac{101}{102}$, znamo da je $c_1 - \frac{1}{111} < \frac{1}{201}$ and $\frac{110}{111} - c_s < \frac{1}{201}$.

Dakle, u skupu $S'_n = \{c_0, c_1, \ldots, c_s, c_{s+1}\}$ uz $c_0 = \frac{1}{111}$ i $c_{s+1} = \frac{110}{111}$ vrijedi:

$$c_{i+1} - c_i \leqslant \frac{1}{201}, \text{ for } 0 < i \leqslant s.$$

Za dani $x \in \left[\frac{1}{111}, \frac{110}{111}\right]$, neka je j takav indeks da vrijedi $c_j \leqslant x \leqslant c_{j+1}$. Budući da je $c_{j+1} - c_j \leqslant \frac{1}{201}$ zaključujemo da je $|x - c_j| \leqslant \frac{1}{402}$ ili $|x - c_{j+1}| \leqslant \frac{1}{402}$.

Zadatak 2.

Neka je N prirodni broj. Stepenicama zovemo dio kvadratne ploče dimenzija $N \times N$ koji se sastoji od prvih K polja u K-tom retku za $K = 1, 2, \ldots, N$. Na koliko je načina moguće razrezati stepenice na pravokutnike različitih površina koji se sastoje od polja dane ploče?

Rješenje.

Primijetimo da se svaki kvadratić na dijagonali nalazi u različitom pravokutniku, pa je potrebno barem N pravokutnika. Pravokutnici će zajedno činiti površinu koja iznosi barem $1+2+\cdots+N$.

Budući da je površina stepenica $1+2+\cdots+N$, mora biti točno N pravokutnika, koji imaju površine $1, 2, \ldots, N$ i u svakom od njih se mora nalaziti točno jedno polje na dijagonali.

Promotrimo pravokutnik koji sadrži polje u kutu stepenica i pretpostavimo da su njegove dimenzije $A \times B$. Budući da se u tom pravokutniku nalazi i jedno polje na dijagonali vrijedi $A + B = N + 1$.

Dakle, površina tog pravokutnika je $A \cdot B = A \cdot (N + 1 - A) \geqslant N$.

Budući da je površina bilo kojeg pravokutnika najviše N, mora vrijediti jednakost. Odavde zaključujemo da je $A = 1$ ili $A = N$.

U oba slučaja, pravokutnik koji sadrži polje u kutu stepenica mora imati površinu N i nakon što ga odrežemo preostaju nam stepenice dobivene od ploče dimenzija $(N-1) \times (N-1)$.

Ako označimo s F_N broj načina na koje je moguće razrezati stepenice dobivene od ploče dimenzija $N \times N$, onda je $F_N = 2 \cdot F_{N-1}$. Budući da je $F_1 = 1$, slijedi $F_N = 2^{N-1}$.

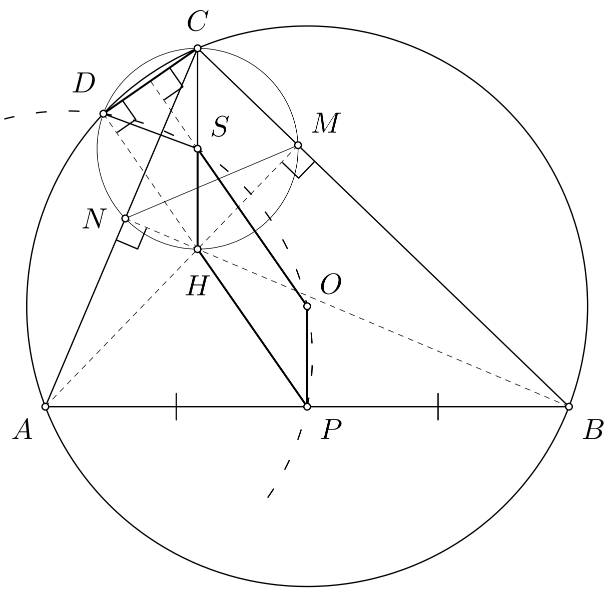
Zadatak 3.

U šiljastokutnom trokutu ABC, u kojem je $|AC| < |BC|$, točke M i N su redom nožišta visina iz vrhova A i B. Kružnica sa središtem O opisana trokutu ABC i kružnica sa središtem S opisana trokutu MNC sijeku se u točkama C i D. Ako je točka P polovište dužine $\overline{AB}$, dokaži da točke P, O, S i D leže na istoj kružnici.

Rješenje.

Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dužina $\overline{CH}$ je promjer opisane kružnice trokuta MNC.

Uočimo da je $\overline{CD}$ zajednička tetiva kružnica opisanih trokutima ABC i MNC, a to znači da je $\overline{CD}$ okomito na spojnicu njihovih središta, SO.



Kako je $\sphericalangle CDH = 90°$, vrijedi $DH \parallel SO$.

Poznato je da je $|CH| = 2|OP|$ pa je $|SH| = |OP|$. Kako je $CH \parallel OP$ (oba pravca su okomita na AB), slijedi da je $SOPH$ paralelogram, pa je i $SO \parallel HP$.

Sada možemo zaključiti da je $DH \parallel HP$, a to znači da su točke D, H i P kolinearne.

Kako vrijedi $|OP| = |SH| = |SD|$, četverokut $DPOS$ je jednakokračni trapez, pa mu se može opisati kružnica.

Zadatak 4.

Neka je n neparan prirodni broj veći od 3. Označimo sa k najmanji prirodni broj takav da je $kn+1$ potpuni kvadrat i označimo sa l najmanji prirodni broj takav da je ln potpuni kvadrat.

Dokaži da je broj n prost ako i samo ako vrijedi $k > \frac{1}{4}n$ i $l > \frac{1}{4}n$.

Rješenje.

$\Longrightarrow$ Ako je $n = p$ prost, onda je $l = p$ pa je očito $l > \frac{n}{4}$. Za k vrijedi: $kp = (y-1)(y+1)$ pa je $y - 1 = k_1, \quad y + 1 = k_2p$ ili $y - 1 = k_1p, \quad y + 1 = k_2$. U svakom slučaju, zbrajanjem ove dvije jednakosti dobijemo $2y > p$. Ako bi vrijedilo da je $4k \leqslant p$, (odnosno $4k < p$ jer je p prost) onda bi imali $y^2 = kp + 1 < \frac{p^2}{4} + 1$, odnosno: $p^2 < 4y^2 < p^2 + 4$. Ovo nije moguće jer između p^2 i $p^2 + 4$ nema kvadrata.

$\Longleftarrow$ Dokazat ćemo da nije moguće da je $4l > n$ i $4k > n$ i da n nije prost. Pretpostavimo suprotno, da to vrijedi za neki složeni neparni prirodni broj n. One proste faktore od n koji dolaze na parnu potenciju sve strpamo u x, ostale izdvojimo:

$$n = x^2 \cdot p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}.$$

Tada je $l = p_1 \cdots p_s$.

$$4p_1 \cdots p_s = 4l > n = x^2 \cdot p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} \geqslant x^2 p_1 \cdots p_s.$$

Dakle, $x^2 < 4$ pa je $x = 1$.

Ako je neki $a_i > 1$ onda je $a_i \geqslant 3$ (jer smo sve parne potencije bili stavili u x). Tada vrijedi:

$$4p_1 \cdots p_s = 4l > n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} \geqslant p_i^2 \cdot p_1 \cdots p_s,$$

tj. $p_i^2 < 4$, što nije moguće. Dakle,

$$n = p_1 \cdots p_s.$$

Označimo s y najmanji prirodni broj veći od 1 takav da je $y^2 - 1$ djeljivo s n (takav sigurno postoji jer je $(n+1)^2 - 1$ djeljivo s n). Očito je $kn + 1 = y^2$, a lako se vidi da je $k > \frac{n}{4} \iff 2y > n$.

Označimo sada $n = pr$, gdje je $p = p_i$ za neki i, a r je umnozak svih p_j za $j \neq i$. Iz pretpostavke da je n složen slijedi da je $r > 1$.

Neka je T broj takav da je $T \equiv 1 \pmod r$, $\quad T \equiv -1 \pmod p$, $\quad 0 \leqslant T < n$. Po CRT postoji jedinstveni takav. Pogledajmo broj $S = n - T$. Vrijedi: $S \equiv -1 \pmod r$, $\quad S \equiv 1 \pmod p$, te $T^2 \equiv S^2 \equiv 1 \pmod n$. Stoga su T i S kandidati za y. A jedan od njih je manji od $\frac{n}{2}$. Pa je $k < \frac{n}{4}$, sto je kontradikcija.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 27. travnja 2014.

Zadatak 1.

Za dani prirodni broj n nađi najmanji prirodni broj k sa sljedećim svojstvom:
Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_d$ realni brojevi, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $a_1+a_2+\cdots+a_d = n$, tada je moguće rasporediti tih d brojeva u k grupa tako da je zbroj brojeva u svakoj grupi najviše 1 (neke grupe mogu biti prazne).

Rješenje.

Rješenje je $k = 2n - 1$.

Ako je $d = 2n - 1$ i $a_1 = \cdots = a_{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$, tada svaka grupa particije može sadržavati najviše jedan broj zbog $\frac{2n}{2n-1} > 1$. Stoga je $k \geqslant 2n - 1$. Preostaje pokazati da uvijek postoji odgovarajuća particija u $2n - 1$ grupa.

Dokaz provodimo indukcijom po d. Za $d \leqslant 2n - 1$ tvrdnja je očita. Ako je $d \geqslant 2n$, tada zbog

$$(a_1 + a_2) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \leqslant n$$

postoje dva broja a_i, a_{i+1} takvi da je $a_i+a_{i+1} \leqslant 1$. "Spojimo" ta dva broja u jedan novi broj a_i+a_{i+1}. Po pretpostavci indukcije, odgovarajuća partija postoji za $d-1$ brojeva $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_d$. To inducira odgovarajuću particiju i za $a_1, \ldots, a_d$.

Zadatak 2.

Dvadesetoro djece ima 100 vrpci. Svaku vrpcu drže za krajeve dva djeteta. Dva djeteta mogu zajedno držati samo jednu vrpcu. Pretpostavimo da je par vrpci čija četiri kraja drže različita djeca moguće odabrati na 4050 načina. Dokaži da svako dijete drži jednak broj vrpci.

Rješenje.

Označimo djecu brojevima 1, 2, ..., 20. Neka je d_i broj vrpci koje drži dijete označeno brojem i. Budući da svaku vrpcu drže dva djeteta imamo

$$\sum_{i=1}^{20} d_i = 2 \cdot 100 = 200.$$

Broj svih parova vrpci je $\dfrac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.

Par vrpci je takav da četiri kraja ne drže različita djeca je zapravo par vrpci takav da postoji dijete koje drži jedan kraj obje vrpce tog para.

Zato je

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{d_i \cdot (d_i - 1)}{2} = 4950 - 4050 = 900.$$

Odavde slijedi

$$\sum_{i=1}^{20} d_i^2 = 1800 + \sum_{i=1}^{20} d_i = 1800 + 200 = 2000.$$

Korsiteći A–K nejednakost dobivamo

$$10 = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{20}}{20} \leqslant \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{20}^2}{20}} = 10.$$

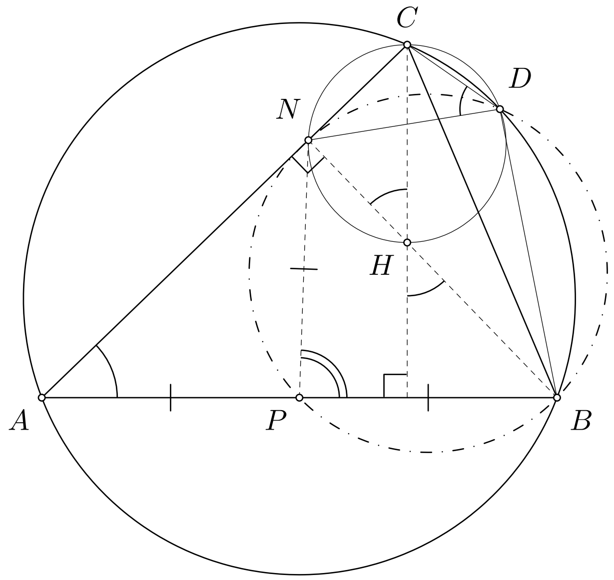
Budući da se jednakost u A–K nejednakosti postiže ako i samo ako su svi d_i jednaki, slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AC| > |BC|$. Neka je H ortocentar tog trokuta, N nožište visine iz vrha B, a P polovište dužine $\overline{AB}$. Kružnice opisane trokutima ABC i CHN sijeku se u točkama C i D. Dokaži da točke B, D, N i P leže na istoj kružnici.

Rješenje.

Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$.



Trokut ABN je pravokutan, a točka P polovište njegove hipotenuze pa je $\sphericalangle BPN = 2\alpha$. S druge strane,

$$\begin{aligned} \sphericalangle BDN &= \sphericalangle BDC - \sphericalangle NDC \\ &= (180^\circ - \sphericalangle BAC) - \sphericalangle NHC \quad \text{(jer su } ABDC \text{ i } NHDC \text{ tetivni četverokuti)} \\ &= (180^\circ - \alpha) - \alpha = 180^\circ - 2\alpha. \end{aligned}$$

Dakle, $\sphericalangle BPN + \sphericalangle BDN = 180^\circ$, pa je četverokut $BPND$ tetivan.

Zadatak 4.

Neka su a, b, c različiti prirodni brojevi i neka su r, s, t prirodni brojevi takvi da vrijedi:

$$ab + 1 = r^2, \qquad ac + 1 = s^2, \qquad bc + 1 = t^2.$$

Dokaži da ne mogu sva tri razlomka $\frac{rs}{t}$, $\frac{rt}{s}$, $\frac{st}{r}$ biti prirodni brojevi.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da su $\frac{rs}{t}$, $\frac{rt}{s}$, $\frac{st}{r}$ prirodni brojevi.

Uočimo prvo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < b < c$. Budući da je $\frac{rs}{t}$ prirodan broj, i $\frac{r^2s^2}{t^2}$ je prirodan broj, odnosno

$$\frac{r^2s^2}{t^2} = \frac{a^2bc + ab + ac + 1}{bc + 1} = a^2 + \frac{ab + ac + 1 - a^2}{bc + 1}$$

je također prirodan broj. Iz $a < b < c$ slijedi

$$ab + ac + 1 - a^2 > ac + 1 = s^2 > 0.$$

Time zaključujemo da su i brojnik i nazivnik gornjeg razlomka pozitivni, pa mora vrijediti

$$ab + ac + 1 - a^2 \geqslant bc + 1 \quad\Longrightarrow\quad (b - a)(c - a) \leqslant 0,$$

što je kontradikcija.