

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

I. razred

1. Što je veće

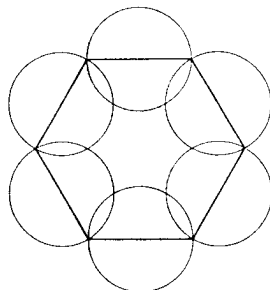
$$A = \frac{2.00\dots004}{(1.00\dots004)^2 + 2.00\dots004} \quad \text{ili} \quad B = \frac{2.00\dots002}{(1.00\dots002)^2 + 2.00\dots002},$$

gdje u svakom broju u brojniku i nazivniku ima po 1998 nula?

2. Nađite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$10(m + n) = mn.$$

3. Ivan i Krešo, pošli su istodobno iz Crikvenice u Kraljevicu, čija je udaljenost 15 km, a Marko je u isto vrijeme krenuo iz Kraljevice u Crikvenicu. Sva trojica imala su jedan bicikl i put su prevaljivali pješačenjem brzinom od 5 km/h ili biciklom brzinom od 15 km/h. Ivan je pošao pješice, dok je Krešo vozio bicikl sve dok se nije sreo s Markom. Tada je Krešo dao bicikl Marku i nastavio put prema Kraljevici pješice, a Marko je nastavio put prema Crikvenici biciklom. Kada je sreo Ivana dao mu je bicikl i ovaj je vozeći se stigao u Kraljevicu, dok je Marko pješice nastavio put do Crikvenice. Koliko vremena je svaki od njih trebao da dođe do svog cilja, koliko je pješačio, a koliko vozio bicikl?
4. Izračunajte površinu šrafranog lika na slici ako stranica pravilnog šesterokuta ima duljinu a .



ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

II. razred

1. Riješite jednadžbu

$$2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i = 0$$

ako se zna da je jedno njezino rješenje realno.

2. Dokažite da za svaka dva realna broja $a \geq 0$ i $b \geq 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leq \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3}.$$

3. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ izabrane su točke E i F , tim redom, takve da je $|BE| = |BF|$. Neka je $\overline{BN}$ visina trokuta BCE . Dokažite da je trokut DNF pravokutan.
4. Neka su m i n prirodni brojevi, $a = (n + 1)^m - n$ i $b = (n + 1)^{m+3} - n$.
- (a) Dokažite da su a i b relativno prosti ako m nije djeljiv s 3.
- (b) Odredite sve brojeve m i n za koje a i b nisu relativno prosti.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

III. razred

1. Dokažite da za svaki trokut sa stranicama a , b , c i nasuprotnim kutovima α , β , γ vrijedi jednakost

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos \alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cos \beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos \gamma = 3.$$

2. U stožac je upisana polusfera čija kružna baza leži u bazi stošca. Omjer oplošja stošca (uključujući i bazu) i oplošja polusfere (bez kružne baze) je $k = \frac{18}{5}$. Odredite vršni kut stošca.

3. U trokutu ABC su dane visine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, pri čemu je

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Dokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

4. Dokažite da među svakih 79 uzastopnih prirodnih brojeva postoji barem jedan čija je suma znamenaka djeljiva sa 13.

Nađite niz od 78 uzastopnih prirodnih brojeva sa svojstvom da suma znamenaka niti jednog od njih nije djeljiva sa 13.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

IV. razred

1. Dokažite da sve tetive parabole $y^2 = 4ax$, koje su hipotenuze pravokutnog trokuta s pravim kutom u ishodištu, prolaze istom točkom.
2. Neka su a i m prirodni brojevi, p neparan prost broj, takav da $p^m | a - 1$ i $p^{m+1} \nmid a - 1$. Dokažite da
 - a) $p^{m+n} | a^{p^n} - 1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$,
 - b) $p^{m+n+1} \nmid a^{p^n} - 1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.
3. Neka je $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ i funkcija $g : A \rightarrow A$ definirana sa $g(k) = 2n - k + 1$. Da li postoji funkcija $f : A \rightarrow A$ takva da je $f(k) \neq g(k)$ za svaki $k \in A$ i $f(f(f(k))) = g(k)$ za svaki $k \in A$, ako je
 - a) $n=999$,
 - b) $n=1000$?
4. Osam žarulja poredano je u krug. Svaka žarulja može biti ili upaljena ili ugašena. U jednom koraku radimo sljedeću transformaciju: žarulja će nakon transformacije biti ugašena, ukoliko je jedna od njoj susjednih žarulja upaljena a druga ugašena, odnosno, žarulja će nakon transformacije svijetliti, ukoliko su obje njoj susjedne žarulje ili upaljene ili ugašene. U jednom se koraku na stanja svih žarulja djeluje istovremeno.
Dokažite da će, nakon najviše četiri koraka, sve žarulje svijetliti.