HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

prvi dan

5. svibnja 2012.

Zadatak 1.

Dani su pozitivni realni brojevi x, y i z takvi da je $x + y + z = 18xyz$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2yz + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 2xz + 1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 2xy + 1}} \geqslant 1.$$

Prvo rješenje.

Iz danog uvjeta zbog AH nejednakosti slijedi

$$xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant xyz \cdot \frac{9}{x + y + z} = \frac{9xyz}{18xyz} = \frac{1}{2}.$$

Koristeći $1 \leqslant 2xy + 2yz + 2zx$ dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz + 1 &\leqslant x^2 + 2xy + 2zx + 4yz \\ &= (x + 2y)(x + 2z) \\ &\leqslant (x + y + z)^2 \end{aligned}$$

pri čemu posljednja nejednakost vrijedi zbog AG nejednakosti.

Stoga je $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2yz + 1}} \geqslant \dfrac{x}{x + y + z}$ i analogno $\dfrac{y}{\sqrt{y^2 + 2zx + 1}} \geqslant \dfrac{y}{x + y + z}$, $\dfrac{z}{\sqrt{z^2 + 2xy + 1}} \geqslant \dfrac{z}{x + y + z}$.

Zbrajanjem tih nejednakosti konačno dobivamo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2yz + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 2xz + 1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 2xy + 1}} \geqslant \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} + \frac{z}{x + y + z} = 1.$$

Drugo rješenje.

Iz AG nejednakosti slijedi $2yz \leqslant y^2 + z^2$, $2xz \leqslant x^2 + z^2$ i $2xy \leqslant x^2 + y^2$, pa je

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2yz + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 2xz + 1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 2xy + 1}} \geqslant \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}.$$

Da bi dokazali traženu nejednakost dovoljno je dokazati da je

$$\frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} \geqslant 1$$

a to je ekvivalentno s

$$(x + y + z)^2 \geqslant x^2 + y^2 + z^2 + 1 \qquad \text{odnosno} \qquad 2xy + 2yz + 2zx \geqslant 1.$$

Iz danog uvjeta, zbog AH nejednakosti, slijedi

$$2(xy+yz+zx)=2xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 2xyz\cdot\frac{9}{x+y+z}=\frac{18xyz}{18xyz}=1,$$

i time je nejednakost dokazana.

Zadatak 2.

Svakom vrhu pravilnog mnogokuta pridružen je jedan od brojeva 0 ili 1. Koristeći dijagonale koje se međusobno ne sijeku osim u vrhovima, Rudi dijeli mnogokut na trokute, a zatim u svaki trokut upisuje zbroj brojeva pridruženih njegovim vrhovima. Dokaži da Rudi može odabrati dijagonale kojima će podijeliti mnogokut tako da se najveći i najmanji od brojeva upisanih u dobivene trokute razlikuju za najviše 1.

Rješenje.

Pojedini vrh zvat ćemo 0-vrh odnosno 1-vrh, ovisno o tome koji mu je broj pridružen.

Ako su brojevi u svim vrhovima jednaki, onda je svejedno kako Rudi odabere dijagonale. Zato možemo pretpostaviti da postoji i 0-vrh i 1-vrh.

Jakom indukcijom po broju vrhova ćemo dokazati da Rudi može podijeliti mnogokut na trokute tako da je u svakom trokutu upisan broj 1 ili broj 2.

Ako je $n=3$, tvrdnja očito vrijedi jer trokut ima dva 0-vrha i jedan 1 vrh, ili obratno.

Lako je i analizirati slučaj $n=4$. Ako postoji dijagonala koja spaja 0-vrh i 1-vrh, onda Rudi povlači tu dijagonalu. U suprotnome, povlači bilo koju dijagonalu i u oba trokuta dobiva istu vrijednost (1 ili 2).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve mnogokute koji imaju manje od n vrhova ($n\geqslant 5$) među kojima postoje i 0-vrh i 1-vrh.

U mnogokutu sa n vrhova odaberimo dva susjedna vrha, A i B, tako da je A 0-vrh, a B 1-vrh. Neka je P vrh koji nije susjedan ni vrhu A ni vrhu B (takav postoji jer je $n\geqslant 5$). Ako je P 0-vrh, Rudi spaja P i B, a u suprotnom spaja P i A. Time je n-terokut podijeljen na dva mnogokuta s manjim brojem vrhova od kojih svaki ima barem jedan 0-vrh i barem jedan 1-vrh. Prema pretpostavci indukcije svaki od ta dva mnogokuta moguće je podijeliti na trokute tako da u svakom trokutu bude upisan broj 1 ili 2, pa isti zaključak vrijedi i za promatrani n-terokut. Time je tvrdnja dokazana.

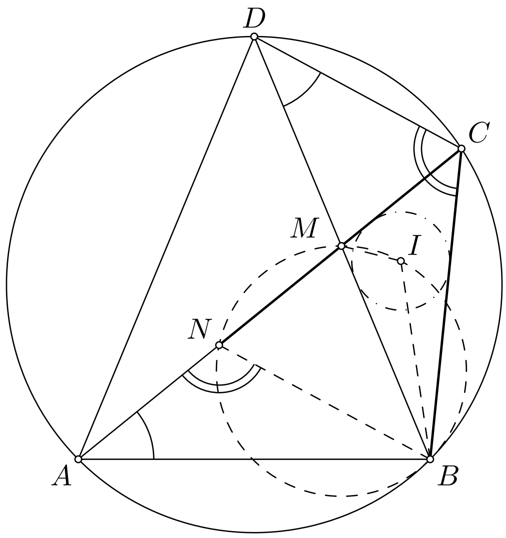
Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ tetivni četverokut takav da je $|AD|=|BD|$ i neka je M sjecište njegovih dijagonala. Nadalje, neka je N drugo sjecište dijagonale $\overline{AC}$ s kružnicom koja prolazi točkama B, M i središtem kružnice upisane trokutu BCM.

Dokaži da vrijedi $|AN|\cdot|NC|=|CD|\cdot|BN|$.

Prvo rješenje.

Označimo $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DBA = \alpha$. Tada je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 180^\circ - 2\alpha$.



Neka je I središte upisane kružnice trokuta BCM. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sphericalangle MIB &= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\sphericalangle BMC + \sphericalangle CBM\right)\\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \sphericalangle MCB\right)\\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \sphericalangle ACB\right)\\
&= 180^\circ - \alpha.
\end{aligned}$$

Kako je četverokut $BIMN$ tetivan vrijedi $\sphericalangle BNC = \alpha$ (neovisno o položaju točke N) pa je trokut BCN jednakokračan i vrijedi $|BC| = |NC|$.

Primijetimo da su trokuti ABN i DBC slični jer je $\sphericalangle ANB = \sphericalangle DCB = 180^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle BAN = \sphericalangle BDC$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$). Zato je

$$\frac{|NA|}{|BN|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|NC|},$$

tj. $|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|$.

Drugo rješenje.

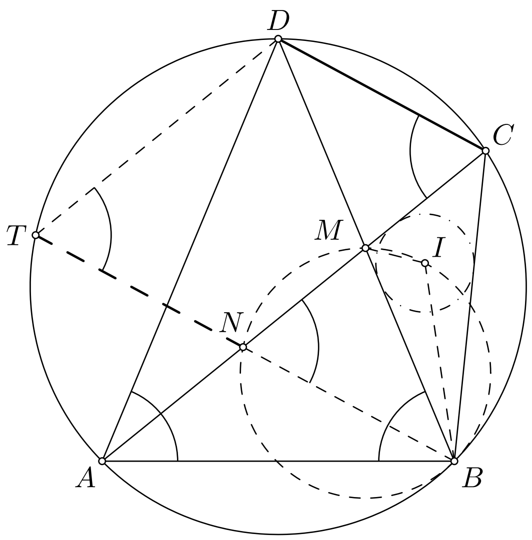
Koristeći iste oznake kao u prvom rješenju, dobivamo $\sphericalangle MIB = 180^\circ - \alpha$.

Kada bi se točka N nalazila na dužini $\overline{CM}$, imali bismo:

$$\begin{gathered}
\sphericalangle ANB = \sphericalangle MNB = \sphericalangle MIB = 180^\circ - \alpha,\\
\sphericalangle NBA = \sphericalangle NBM + \sphericalangle MBA > \alpha,
\end{gathered}$$

pa bi u trokutu ABN zbroj veličina dva kuta bio veći od 180°, što nije moguće.

Prema tome, točka N se nalazi na dužini $\overline{AM}$ i vrijedi $\sphericalangle BNM = 180^\circ - \sphericalangle MIB = \alpha$.



Neka je točka T drugo sjecište opisane kružnice četverokuta $ABCD$ i pravca BN. S obzirom da je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \alpha$, $\sphericalangle TNA = \sphericalangle BNC = \alpha$ i $\sphericalangle BTD = \sphericalangle BAD = \alpha$, četverokut $CDTN$ je paralelogram i vrijedi $|NT| = |CD|$.

Konačno, iz potencije točke N s obzirom na opisanu kružnicu četverokuta $ABCD$ dobivamo traženo:

$$|AN| \cdot |NC| = |BN| \cdot |NT| \qquad \Longrightarrow \qquad |AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|.$$

Treće rješenje.

Kako je $\sphericalangle NCB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (obodni kut) i $\sphericalangle BNC = \alpha$ (kao u prvom rješenju), trokut BCN je jednakokračan i vrijedi $|BC| = |CN|$. Štoviše, trokuti ABD i CBN su slični.

Primjenom Ptolomejevog poučka na tetivni četverokut $ABCD$ dobivamo

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|,$$
$$\frac{|AB|}{|BD|} \cdot |CD| + |BC| \cdot \frac{|DA|}{|BD|} = |AC|.$$

Zbog $\triangle ABD \sim \triangle NBC$ vrijedi $|AB| : |BD| : |DA| = |NB| : |BC| : |CN|$ pa dobivamo

$$\frac{|NB|}{|BC|} \cdot |CD| + |NC| = |AC|,$$
$$\frac{|NB|}{|NC|} \cdot |CD| = |AN|,$$

i konačno

$$|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|.$$

Zadatak 4.

Postoje li cijeli brojevi a i b takvi da su oba broja $a + b$ i $a \cdot b - 1$ potpuni kvadrati?

Rješenje.

Pretpostavimo da postoje cijeli brojevi a, b, M i N takvi da je $a+b = M^2$ i $a \cdot b - 1 = N^2$.

Prvi slučaj: Brojevi a i b su parni.

Tada iz $a \cdot b = N^2 + 1$ zaključujemo da je $N^2 + 1$ djeljiv s 4, što nije moguće (kvadrat neparnog broja daje uvijek ostatak 1 pri dijeljenju s 4).

Drugi slučaj: Točno jedan od brojeva a i b (recimo da je to a) je paran.

Iz $a \cdot b = N^2 + 1$ zaključujemo da je $b = 4k + 1$ za neki cijeli broj k, jer $N^2 + 1$ ne može imati faktor oblika $4k + 3$ za cijeli broj k (poznata činjenica koja se može dokazati pomoću malog Fermatovog teorema).

Također, N je neparan; neka je $N = 2l + 1$ za neki cijeli broj l. Iz $a \cdot b = (2l+1)^2 + 1 = 4l^2 + 4l + 2$ zaključujemo da je $a = 4m + 2$ za neki cijeli broj m.

Ali tada je $a + b = 4n + 3$, za neki cijeli broj n, pa ne može biti kvadrat cijelog broja. Kontradikcija!

Treći slučaj: Brojevi a i b su neparni.

Tada M mora biti paran, dakle M^2 mora biti djeljiv s 4. Zato barem jedan od brojeva a i b mora imati ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Ponovo smo došli do kontradikcije, jer $N^2 + 1$ ne može imati faktor $4k + 3$ za neki cijeli broj k.

Kako sva tri slučaja dovode do kontradikcije, zaključujemo da ne postoje brojevi s traženim svojstvom.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

drugi dan

6. svibnja 2012.

Zadatak 1.

Zadan je niz realnih brojeva:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1, \\ x_n &= \sqrt{\frac{n}{2} + x_{n-1}x_{n-2}}, \qquad \text{za } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Postoji li realni broj A takav da je $An < x_n < An + 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?

Rješenje.

Primjetimo da su svi članovi niza pozitivni realni brojevi. Iz dane relacije zaključujemo:

$$2x_n^2 = n + 2x_{n-1}x_{n-2} \leqslant x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 + n.$$

Ukoliko analogne nejednakosti napišemo i za $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 3, 2, dobijemo:

$$\begin{aligned} 2x_n^2 &\leqslant x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 + n, \\ 2x_{n-1}^2 &\leqslant x_{n-2}^2 + x_{n-3}^2 + n - 1, \\ 2x_{n-2}^2 &\leqslant x_{n-3}^2 + x_{n-4}^2 + n - 2, \\ &\vdots \\ 2x_3^2 &\leqslant x_2^2 + x_1^2 + 3, \\ 2x_2^2 &\leqslant x_1^2 + x_0^2 + 2. \end{aligned}$$

Zbrajanjem svih ovih nejednakosti, dobivamo:

$$2x_n^2 + x_{n-1}^2 \leqslant 2x_1^2 + x_0^2 + [n + (n-1) + \cdots + 3 + 2],$$

odnosno

$$2x_n^2 + x_{n-1}^2 \leqslant \frac{n^2 + n + 4}{2}. \tag{1}$$

Ukoliko postoji traženi realni broj A, lijeva strana prethodne nejednakosti je veća ili jednaka od $2A^2n^2 + A^2(n-1)^2$ pa imamo:

$$2A^2n^2 + A^2(n-1)^2 \leqslant \frac{n^2 + n + 4}{2},$$

odnosno

$$6A^2n^2 - 4A^2n + 2A^2 \leqslant n^2 + n + 4.$$

Da bi prethodna nejednakost vrijedila za svaki $n \in \mathbb{N}$, treba vrijediti da je $6A^2 \leqslant 1$, tj. $A \leqslant \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Dokažimo da $A = \frac{\sqrt{6}}{6}$ zadovoljava uvjete zadatka.

Prvo, matematičkom indukcijom dokažimo da je $x_n > \frac{n\sqrt{6}}{6}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Tvrdnja vrijedi za $n = 0$ i $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$ i $n-2$, tj. da je $x_{n-1} > \frac{(n-1)\sqrt{6}}{6}$ i $x_{n-2} > \frac{(n-2)\sqrt{6}}{6}$. Tada imamo:

$$x_n^2 = \frac{n}{2} + x_{n-1}x_{n-2} > \frac{n}{2} + \frac{(n-1)\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{(n-2)\sqrt{6}}{6} = \frac{n^2+2}{6} > \frac{n^2}{6},$$

odnosno $x_n > \frac{n\sqrt{6}}{6}$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada da je $x_n < \frac{n\sqrt{6}}{6} + 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Lako se provjeri da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$. Iz nejednakosti (1) i činjenice da je $x_{n-1}^2 > \frac{(n-1)^2}{6}$ imamo:

$$2x_n^2 \leqslant \frac{n^2+n+4}{2} - x_{n-1}^2 < \frac{n^2+n+4}{2} - \frac{(n-1)^2}{6} = \frac{2n^2+5n+11}{6}.$$

Preostaje nam dokazati:

$$\frac{2n^2+5n+11}{6} < 2\left(\frac{n\sqrt{6}}{6} + 1\right)^2$$

Međutim, ova nejednakost je istinita jer je ekvivalentna nejednakosti:

$$5n - 1 < 4n\sqrt{6}$$

koja očito vrijedi za $n \geqslant 3$.

Zadatak 2.

U državi postoji g gradova i c cesta, pri čemu svaka cesta povezuje točno dva različita grada, a između dva grada postoji najviše jedna cesta. Ceste su označene brojevima $1, 2, \ldots, c$. Tonći svoje putovanje mora proći tako da kad zapiše oznake cesta redom kojim ih je prolazio dobije (strogo) rastući niz brojeva. Dokaži da postoji grad takav da krenuvši iz toga grada Tonći može proći barem $\dfrac{2c}{g}$ cesta.

Prvo rješenje.

Neka Tonći u svaki grad postavi jednog svog prijatelja. Neka u koraku i ($i = 1, 2, \ldots, c$) prijatelji koji se trenutno nalaze u gradovima koje spaja cesta i zamijene svoja mjesta. Dakle, u svakom koraku dogode se po dva pomicanja, pa je ukupno bilo točno $2c$ pomicanja, što znači da se barem jedan od g prijatelja pomaknuo barem $\dfrac{2c}{g}$ puta.

Ako Tonći krene iz grada u kojem je taj prijatelj bio na početku moći će ispuniti uvjet.

Drugo rješenje.

Neka je duljina puta jednaka broju cesta na tom putu. Pridružimo svakom gradu x težinu w_x jednaku duljini najduljeg puta s krajem u gradu x i s rastućim nizom oznaka cesta. Ako dokažemo da je $\sum_x w_x \geqslant 2c$, Dirichletov princip jamči da imamo grad s težinom barem $\frac{2c}{g}$.

Težine w_x ćemo zbrajati iterativno: na početku je njihov zbroj jednak 0. U i-tom koraku dodajemo cestu s oznakom i između gradova x i y . Neka su w_x i w_y do ovog koraka akumulirane težine gradova x i y.

Ako je $w_x = w_y$ onda se nove težine povećavaju za 1, tj. $w'_x = w_y + 1$ i $w'_y = w_x + 1$.

Ako je $w_x < w_y$ onda cesta s oznakom i produljava za 1 najdulji put s rastućim nizom oznaka cesta i s krajem u gradu x, pa su nove težine $w'_x = w_y + 1 \geqslant (w_x + 1) + 1 = w_x + 2$ i $w'_y = w_y$.

U oba slučaja, kada dodamo cestu s oznakom i, zbroj težina gradova se poveća za barem 2. Na ovaj način nakon svih c koraka, zbroj težina gradova nije manji od $2c$, što smo i trebali pokazati.

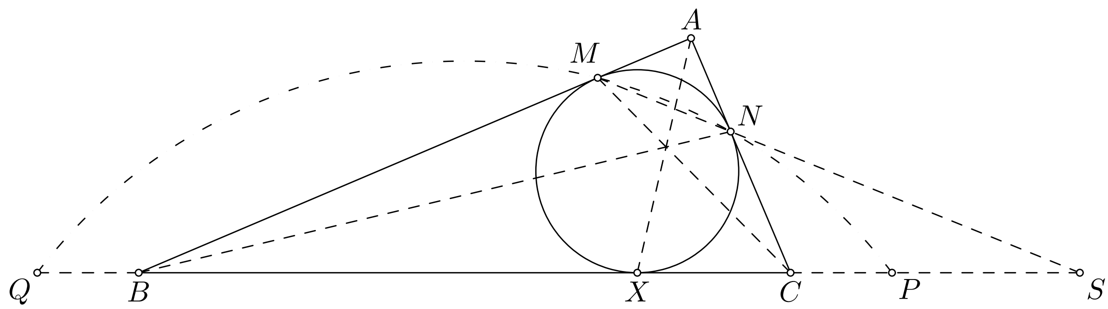
Zadatak 3.

Neka su točke M i N redom dirališta upisane kružnice raznostraničnog trokuta ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$, a točke P i Q redom dirališta pripisanih kružnica nasuprot vrhova B i C s pravcem BC. Dokaži da je četverokut $MNPQ$ tetivan ako i samo ako je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

Prvo rješenje.

Neka su $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$ duljine stranica trokuta ABC, a s njegov poluopseg. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b < c$.

Nadalje, neka je točka S sjecište pravaca BC i MN, a točka X diralište upisane kružnice trokuta ABC sa stranicom $\overline{BC}$.



Primjenom Menelajeva poučka na pravac MN i trokut ABC dobivamo:

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BS|}{|CS|} \cdot \frac{|CN|}{|AN|} = 1.$$

Kako je $|AM| = |AN| = s - a$, $|BM| = |BX| = s - b$ i $|CN| = |CX| = s - c$, vrijedi

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CN|}{|AN|} = 1,$$

odakle proizlazi:

$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BS|}{|CS|} = \frac{|SX| + |BX|}{|SX| - |CX|}.$$

Označimo li $|SX| = d$, imamo:

$$\frac{s-b}{s-c} = \frac{d+(s-b)}{d-(s-c)},$$
$$d\,(s-b) - (s-b)\,(s-c) = d\,(s-c) + (s-b)\,(s-c)\,,$$
$$d\,(c-b) = 2\,(s-b)\,(s-c)\,.$$

Još je $|PX| = |CX| + |CP| = (s-c) + (s-a) = b$, $|QX| = |BX| + |BQ| = (s-b) + (s-a) = c$ i $|SM| \cdot |SN| = |SX|^2$ (potencija točke S s obzirom na upisanu kružnicu trokuta ABC).

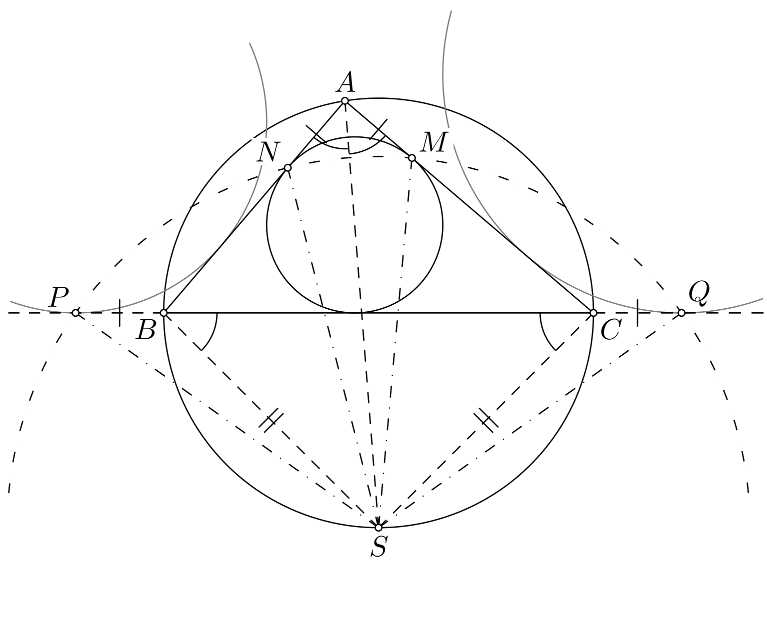
Konačno, tvrdnju dokazujemo sljedećim nizom ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
& \text{Četverokut } MNPQ \text{ je tetivan.} \\
\Longleftrightarrow\quad & |SM| \cdot |SN| = |SP| \cdot |SQ| \\
\Longleftrightarrow\quad & |SX|^2 = (|SX| - |PX|)\,(|SX| + |QX|) \\
\Longleftrightarrow\quad & d^2 = (d-b)\,(d+c) \\
\Longleftrightarrow\quad & d\,(c-b) = bc \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\,(s-b)\,(s-c) = bc \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2 - (b-c)^2 = 2bc \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2 = b^2 + c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{Trokut } ABC \text{ je pravokutan s pravim kutom pri vrhu } A.
\end{aligned}$$

Napomena: Pravci AX, BN i CM se prema obratu Cevina poučka sijeku u jednoj točki (Gergonneovoj točki), dok točke B, X, C i S čine harmonijsku četvorku.

Drugo rješenje.

Neka su $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$ duljine stranica trokuta ABC, a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg. Usto, neka je α veličina kuta $\sphericalangle BAC$.



Pretpostavimo da je četverokut $MNPQ$ tetivan. Tada je središte njegove opisane kružnice sjecište simetrala tetiva $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$.

Kako je $|BP| = |CQ| = s - a$, simetrala tetive $\overline{PQ}$ ujedno je i simetrala dužine $\overline{BC}$, a simetrala tetive $\overline{MN}$ ujedno je i simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

Stoga, središte opisane kružnice četverokuta $MNPQ$ je točka S – polovište luka BC opisane kružnice trokuta ABC (na kojem ne leži točka A).

Četverokut $ABSC$ je tetivan i vrijedi $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SAC = \frac{\alpha}{2}$, $|BS| = |CS| = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, a primjenom Ptolomejevog poučka dobije se:

$$
\begin{aligned}
|AB|\,|CS| + |BS|\,|CA| &= |AS|\,|BC|\,, \\
(b+c)\,|BS| &= a\,|AS|\,, \\
a\,|AS| &= \frac{a\,(b+c)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \\
|AS| &= \frac{b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}
$$

Trokuti ANS i BPS imaju dva para sukladnih stranica ($|AN| = |BP| = s - a$, $|SN| = |SP| = R$) i vrijedi $\sphericalangle NAS = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle PBS = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Primjenom poučka o kosinusu u oba trokuta dobije se:

$$
\begin{aligned}
|SN|^2 &= |AN|^2 + |AS|^2 - 2\,|AN|\,|AS|\cos\sphericalangle NAS \\
|SP|^2 &= |BP|^2 + |BS|^2 - 2\,|BP|\,|BS|\cos\sphericalangle PBS,
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (s-a)^2 + |AS|^2 - 2\,(s-a)\,|AS|\cos\frac{\alpha}{2} \\
R^2 &= (s-a)^2 + |BS|^2 + 2\,(s-a)\,|BS|\cos\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

Slijedi $|AS| - |BS| = 2\,(s-a)\cos\frac{\alpha}{2}$ (zbog $|AS| + |BS| \neq 0$), odakle se dobije $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$, odnosno $\alpha = 90^\circ$.

Obrat se dokazuje nešto jednostavnije. Ako je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A, dužina $\overline{BC}$ je promjer njegove opisane kružnice i vrijedi $|BS| = |CS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|AS| = \frac{(b+c)\sqrt{2}}{2}$.

Primjenom poučka o kosinusu u trokutima ANS i BPS dobije se:

$$
\begin{aligned}
|SN|^2 &= |AN|^2 + |AS|^2 - 2\,|AN|\,|AS|\cos\sphericalangle NAS \\
&= (s-a)^2 + \frac{(b+c)^2}{2} - 2\,(s-a)\,\frac{(b+c)\sqrt{2}}{2}\cos 45^\circ \\
&= (s-a)^2 + \frac{(b+c)^2}{2} - (s-a)\,(b+c)
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
|SP|^2 &= |BP|^2 + |BS|^2 - 2\,|BP|\,|BS|\cos\sphericalangle PBS \\
&= (s-a)^2 + \frac{a^2}{2} - 2\,(s-a)\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos 135^\circ \\
&= (s-a)^2 + \frac{a^2}{2} + a\,(s-a)\,.
\end{aligned}
$$

Konačno je

$$
\begin{aligned}
|SN|^2-|SP|^2&=\frac{(b+c)^2}{2}-\frac{a^2}{2}-(s-a)(b+c+a)\\
&=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}-\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2}\\
&=0
\end{aligned}
$$

pa zbog simetrija u odnosu na simetralu dužine $\overline{BC}$ i simetralu kuta $\sphericalangle BAC$ vrijedi $|SM|=|SN|=|SP|=|SQ|$ i četverokut $MNPQ$ je tetivan.

Napomena: "Obrat" (tj. ako je kut pravi, onda su točke konciklične) može i bez trigonometrije: dovoljno je uočiti da su trokuti IMS i CQS sukladni (I je središte upisane kružnice, ostale oznake sa slike u rješenju).

Zadatak 4.

Za prirodni broj d, neka je $f(d)$ najmanji prirodni broj koji ima točno d pozitivnih djelitelja. (Npr. $f(1)=1$, $f(5)=16$, $f(6)=12$.)

Dokaži da za svaki prirodni broj k broj $f(2^{k-1})$ dijeli $f(2^k)$.

Prvo rješenje.

Ako je rastav prirodnog broja n na proste faktore dan s $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}, a_i\geqslant 0$ onda je broj djeljitelja broja n jednak $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_r+1)$.

Neka je k prirodan broj i $f(2^k)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$. Tada je $a_i=2^{b_i}-1$ za neke cijele brojeve $b_i\geqslant 0, i=1,2,\ldots,r$ i vrijedi $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i=k$.

Neka su p_i, p_j bilo koja dva različita prosta broja koja dijele $f(2^k)$. Ako u rastavu broja $f(2^k)$ zamijenimo $p_i^{2^{b_i}-1}$ s $p_i^{2^{b_i+1}-1}$ i $p_j^{2^{b_j}-1}$ s $p_j^{2^{b_j-1}-1}$ dobit ćemo broj koji ima također 2^k djeljitelja (kao i $f(2^k)$) jer je $2^{b_i+1}\cdot 2^{b_j-1}=2^{b_i}\cdot 2^{b_j}$. Zbog minimalnosti broja $f(2^k)$ zaključujemo da vrijedi

$$
p_i^{2^{b_i}-1}\cdot p_j^{2^{b_j}-1}<p_i^{2^{b_i+1}-1}\cdot p_j^{2^{b_j-1}-1},
$$

što je ekvivalentno s

$$
p_j^{2^{b_j-1}}<p_i^{2^{b_i}}. \tag{2}
$$

Ako dozvolimo mogućnost da su neki od brojeva c_i ili b_i jednaki nula, možemo zapisati $f(2^{k+1})=p_1^{2^{c_1}-1}p_2^{2^{c_2}-1}\cdots p_r^{2^{c_r}-1}$. Pritom je $\sum\limits_{i=1}^{r} c_i=k+1>k=\sum\limits_{i=1}^{r} b_i$ pa postoji prirodan broj s takav da je $c_s>b_s$.

Neka je t prirodan broj različit od s. Koristeći formulu (2) prvo za par (p_s,p_t), a onda za par (p_t,p_s) dobivamo

$$
p_t^{2^{c_t}}>p_s^{2^{c_s-1}}\geqslant p_s^{2^{b_s}}>p_t^{2^{b_t-1}}.
$$

Iz ovoga zaključujemo da je $c_t>b_t-1$, tj. $c_t\geqslant b_t$ za svaki prirodan broj $t=1,\ldots,r$, što znači da $f(2^{k+1})$ dijeli $f(2^k)$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da rastav broja $f(2^k)$ na proste faktore zadovoljava uvjet (2). Nadalje uvjet (2) jedinstveno određuje $f(2^k)$ u smislu da ukoliko postoje dva broja $n = p_1^{2^{b_1}-1} p_2^{2^{b_2}-1} \cdots p_r^{2^{b_r}-1}$ i $m = p_1^{2^{c_1}-1} p_2^{2^{c_2}-1} \cdots p_r^{2^{c_r}-1}$ takva da je $b_i, c_i \geqslant 0$ i $\sum_{i=1}^{r} b_i = \sum_{i=1}^{r} c_i = k$, te za sve različite i, j vrijedi

$$p_j^{2^{b_j-1}} < p_i^{2^{b_i}} \quad \text{i} \quad p_j^{2^{c_j-1}} < p_i^{2^{c_i}}$$

onda je $n = m$. Zaista, ako za neki s vrijedi $c_s > b_s$ onda (zbog jednakosti suma) mora postojati neki t takav da je $c_t < b_t$. No tada je

$$p_t^{2^{c_t}} > p_s^{2^{c_s-1}} \geqslant p_s^{2^{b_s}} > p_t^{2^{b_t-1}},$$

što je u kontradikciji s $c_t < b_t$. Dakle, $c_t = b_t$ za sve $t = 1, 2, ..., r$.

Neka je p_j najmanji prost broj takav da je $p_j^{2^{b_j}} < p_i^{2^{b_i}}$ za sve i različite od j. Broj $f(2^k) \cdot p_j^{2^{b_j}}$ se dobiva zamjenom faktora $p_j^{2^{b_j}-1}$ u $f(2^k)$ faktorom $p_j^{2^{b_j+1}-1}$ i ima točno 2^{k+1} djeljitelja. Zbog načina na koji smo odabrali p_j rastav tog novog broja na proste faktore zadovoljava analogon uvjeta (2). Budući da smo dokazali da su brojevi koji zadovoljavaju taj uvjet minimalni slijedi da je $f(2^{k+1}) = f(2^k) \cdot p_j^{2^{b_j}}$, pa $f(2^k)$ dijeli $f(2^{k+1})$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor IMO ekipe

12. svibnja 2012.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x^2 + f(y)) = (f(x) + y^2)^2.$$

Rješenje.

Označimo $a = f(0)$. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u početnu jednadžbu, dobijemo $f(a) = a^2$.

Uvrštavanjem $y = 0$ u početnu jednadžbu, dobijemo:

$$f(x^2 + a) = f(x)^2. \tag{3}$$

Uvrštavanjem $x = a$ iz ove jednakosti slijedi: $f(a^2 + a) = f(a)^2 = a^4$.

Pretpostavimo da je $a < 0$. To znači da postoji $b > 0$ takav da je $a = -b^2$. Uvrštavanjem $x = b$ u (3) dobijemo:

$$a = f(0) = f(b^2 + a) = f(b)^2 \geqslant 0,$$

što je kontradikcija. Dakle, $a \geqslant 0$.

Uvrštavanjem $x = \sqrt{a}$, $y = a$ u početnu jednadžbu, imamo:

$$f(a + a^2) = \left(f(\sqrt{a}) + a^2\right)^2. \tag{4}$$

Dobili smo

$$f(a + a^2) = \left(f(\sqrt{a}) + a^2\right)^2 = a^4.$$

tj.

$$f(\sqrt{a})(f(\sqrt{a}) + 2a^2) = 0.$$

Pretpostavimo da je $f(\sqrt{a}) = -2a^2$. Ukoliko označimo, $x = \sqrt{\sqrt{a} + 2a^2}$, $y = \sqrt{a}$ vrijedi:

$$f(x^2 + f(y)) = f(\sqrt{a} + 2a^2 - 2a^2) = f(\sqrt{a}) = -2a^2 < 0.$$

Međutim, iz početne jednadžbe imamo $f(x^2 + f(y)) = (f(x) + y^2)^2 \geqslant 0$, što je kontradikcija. Dakle, $f(\sqrt{a}) = 0$.

Uvrštavanjem $x = 0$ u početnu jednadžbu, dobijemo:

$$f(f(y)) = (a + y^2)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem $y = \sqrt{a}$ dobijemo:

$$a = f(0) = f(f(\sqrt{a})) = (a + a)^2.$$

Stoga imamo dvije mogućnosti: $a = \frac{1}{4}$ ili $a = 0$.

Pretpostavimo da je $a = \frac{1}{4}$. Tada je $f(\frac{1}{2}) = 0$. Kako je $f(f(y)) = \left(a + y^2\right)^2$, znamo da je $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$. Ukoliko su x i y realni brojevi za koje je $x^2+f(y) = \frac{1}{2}$, iz zadane jednadžbe dobijemo da je $f(x) = -y^2$. To vrijedi npr. za $x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ i $y = \frac{1}{4}$ pa zaključujemo da je $f(\frac{\sqrt{7}}{4}) = -\frac{1}{16} < 0$. Međutim, uvrštavanjem $x = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}$ u jednadžbu (3) dobijemo $f(\frac{\sqrt{7}}{4}) \geqslant 0$, što je kontradikcija.

Stoga mora biti $a = 0$. Dobivene jednakosti sada postaju $f(x^2) = f(x)^2$ i $f(f(y)) = y^4$.

Iz prve jednadžbe slijedi $f(x) \geqslant 0$ za svaki $x \geqslant 0$.

Pretpostavimo da postoji $t > 0$ za koji je $f(t) < t^2$. Uvrštavanjem $x = \sqrt{t^2 - f(t)}$ i $y = t$ u polaznu jednadžbu, dobijemo:

$$f(t^2) = (f(\sqrt{t^2 - f(t)}) + t^2)^2 \geqslant t^4,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $f(t) < t^2$. Dakle, za sve pozitivne brojeve x vrijedi $f(x) \geqslant x^2$.

Sada imamo:

$$x^4 = f(f(x)) \geqslant f(x)^2 \geqslant x^4 \text{ za sve } x > 0,$$

što je moguće samo ako je $f(x) = x^2$ za sve $x \geqslant 0$.

Neka je w proizvoljni pozitivni broj. Uvrštavanjem $-w$ umjesto x u $f(x^2) = (f(x))^2$, dobijemo da je $f(-w) = w^2$ ili $f(-w) = -w^2$. Međutim, ako je $f(-w) = -w^2$, uvrštavanjem $x = w$, $y = -w$ u zadanu jednadžbu, dobijemo:

$$0 = f(0) = f(w^2 - w^2) = f(x^2 + f(y)) = (f(x) + y^2)^2 = 4w^4 > 0,$$

što nije moguće.

Dakle, jedino moguće rješenje dane jednadžbe je $f(x) = x^2$. Direktnom provjerom lako se vidi da ta funkcija zaista zadovoljava polaznu jednadžbu.

Zadatak 2.

Uz obalu nekog otoka nalazi se 20 sela. U svakom selu živi 20 boraca. Svaki od boraca bori se sa svim borcima iz ostalih sela. Svaka dva borca imaju različitu snagu i borac koji je snažniji pobjeđuje u borbi. Kažemo da je selo A nadvladalo selo B ako je u barem k borbi između boraca iz A i boraca iz B pobijedio borac iz A. Nakon svih borbi ustanovljeno je da je svako selo nadvladalo selo koje mu je neposredni susjed u smjeru kazaljke na satu.

Dokaži da najveći mogući k iznosi 290.

Rješenje.

Traženi broj je $k = 290$. Prvo pokažimo da je $k > 290$ nemoguće. U svakom selu rangiramo borce prema jačini (od 1. do 20.) i izdvojimo onog borca koji je deseti po jačini u svom selu. Neka najslabiji među izdvojenim borcima živi u selu A. Tada u svakom drugom selu B (pa posebno i u selu susjednom selu A) postoji barem 10 boraca (svi od 1. do 10. mjesta po jačini) koji su pobijedili barem 11 boraca (sve od 10. do 20.) iz A. Dakle broj borbi u kojima su borci iz A pobjedili je najviše $20 \cdot 20 - 10 \cdot 11 = 290$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je selo A jače od svog susjeda.

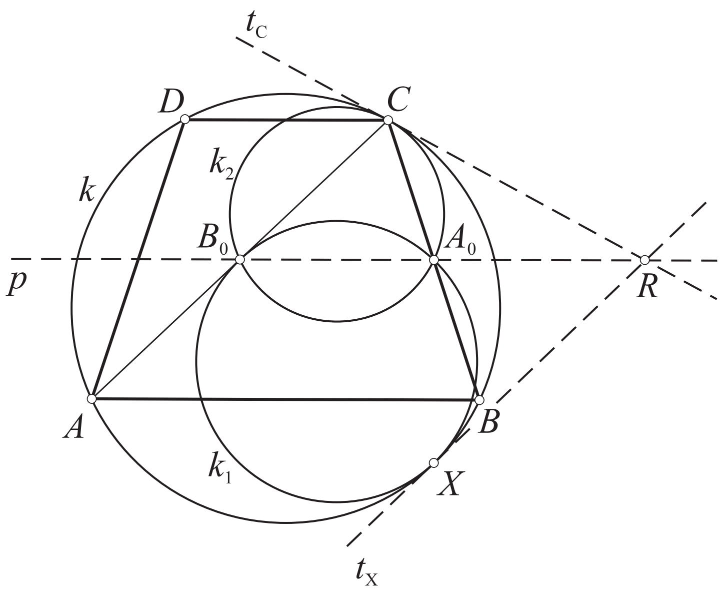
Primjer koji pokazuje da je za $k = 290$ moguć opisani ishod borbi konstruiramo na sljedeći način. Neka je svih 400 boraca rangirano od najslabijeg do najjačeg, te uočimo 210 slabijih (od 1 do 210) i 190 jačih boraca (od 211 do 400). Za $i = 1, 2, \dots, 20$, neka u selu A_i živi i slabijih i $20 - i$ jačih boraca, preciznije, neka su u A_1 borci s rangom 1 i $211 - 229$, u A_2 borci s rangom $2 - 3$ i $230 - 247$ itd.

Pokažimo da je selo A_i jače od sela A_{i-1} za $i = 2, \dots, 20$. Svi slabiji borci iz A_i su pobijedili slabije borce iz A_{i-1}, a svi jači borci iz A_i su pobijedili sve borce iz A_{i-1}. Broj borbi u kojima su pobijedili borci iz sela A_i je $i \cdot (i-1) + (20-i) \cdot 20 = i^2 - 21i + 400$. Ovaj broj je najmanji za $i = 10$ ili $i = 11$ i tada iznosi točno 290. Osim toga, 19 jačih boraca sela A_1 pobijedilo je sve borce iz sela A_{20} pa je zbog $20 \cdot 19 = 380 > 290$ i selo A_1 jače od sela A_{20}. Time je tvrdnja dokazana.

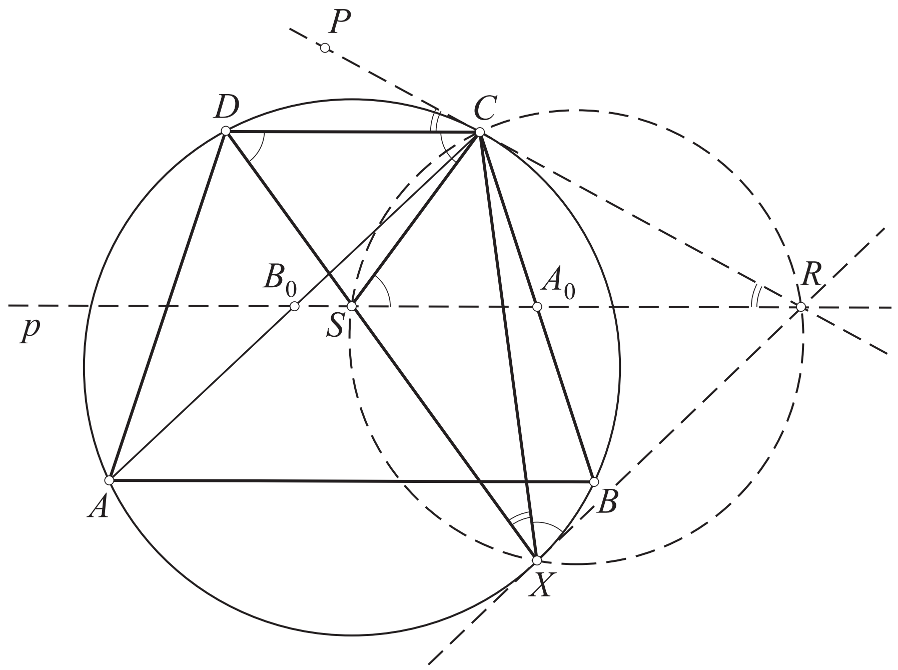
Zadatak 3.

Trapez $ABCD$ s duljom osnovicom $\overline{AB}$ upisan je u kružnicu k. Neka su A_0, B_0 redom polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Neka je N nožište visine iz vrha C na AB, a G težište trokuta ABC. Kružnica k_1 prolazi točkama A_0 i B_0 te dodiruje kružnicu k u točki X, različitoj od C. Dokaži da su točke D, G, N i X kolinearne.

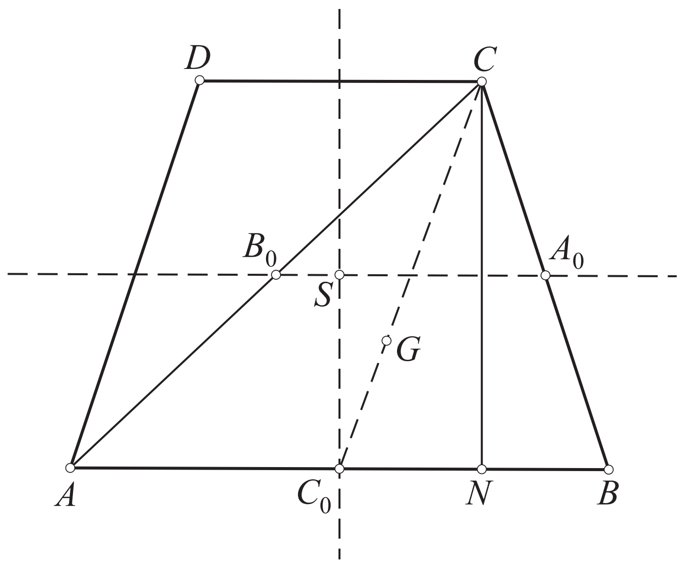
Rješenje.



Neka je k_2 kružnica opisana trokutu A_0B_0C. Budući da je k_2 slika kružnice k pri homotetiji iz točke C (s koeficijentom $1/2$), kružnice k_2 i k se diraju u točki C. Tangente t_X i t_C na kružnicu k kroz X i C su redom potencijale parova kružnica (k, k_1) i (k, k_2), pa je njihov presjek R radikalno središte kružnica k, k_1, k_2. Zato točka R leži na potencijali A_0B_0 para kružnica (k_1, k_2). Neka je p pravac na kojem leže točke R, A_0 i B_0.



Neka je točka S presjek pravaca p i DX, a točka P na pravcu t_C takva da je točka C između P i R. Tada je $\sphericalangle CRS = \sphericalangle PCD$ (jer su pravci CD i p paralelni) i $\sphericalangle CXS = \sphericalangle PCD$ (prema teoremu o kutu tetive i tangente t_C). Zaključujemo da je $\sphericalangle CXS = \sphericalangle CRS$ i četverokut $CSXR$ je tetivan. Zato je $\sphericalangle RXC = \sphericalangle RSC$. No, $\sphericalangle RSC = \sphericalangle SCD$ (opet jer su pravci CD i p paralelni) te $\sphericalangle CDS = \sphericalangle CDX = \sphericalangle RXC$ (prema teoremu o kutu tetive i tangente t_X). Zaključujemo da je $\sphericalangle SCD = \sphericalangle RSC = \sphericalangle RXC = \sphericalangle CDS$ te S leži na simetrali dužine $\overline{CD}$.



Ostaje pokazati da točke D, S, G i N leže na istom pravcu. Primijetimo da su točke C, D, N vrhovi pravokutnika čije središte je S pa točka N leži na pravcu DS. Neka je C_0 polovište dužine AB. Neka je G' presjek pravca na kojem leže D, S, N s pravcem CC_0. Tada su trokuti C_0NG' i CDG' slični i vrijedi $|CG'| : |C_0G'| = |CD| : |NC_0| = 2 : 1$. No, točka G je jedinstvena točka na dužini $\overline{CC_0}$ koja dijeli tu dužinu u omjeru $2 : 1$ pa slijedi da je $G = G'$ i G leži na pravcu DS. Dakle, pokazali smo da točke G, N i X leže na pravcu DS.

Zadatak 4.

Za dani prirodni broj k neka je $S(k)$ zbroj svih brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ koji su relativno prosti s k. Neka je m prirodni i n neparni prirodni broj. Dokaži da postoje prirodni brojevi x i y, pri čemu m dijeli x, takvi da vrijedi $2S(x) = y^n$.

Prvo rješenje.

Za $k = 1$, $S(k) = 1$. Za $k > 1$, uočimo da za prirodan broj $a < k$ koji je relativno prost sa k vrijedi da je i $k - a$ relativno prost sa k. Prema tome, brojeve iz sume $S(k)$ možemo spojiti u parove koji u sumi daju k. Brojeva koji su relativno prosti sa k (i manji od k) ima $\varphi(k)$, pa vrijedi

$$S(k) = \frac{k\varphi(k)}{2}.$$

Neka je q najveći prosti faktor broja m i neka su $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_s = q$ uzastopni prosti brojevi. Tada je $m = p_1^{a_1} \ldots p_s^{a_s}$ (pritom su neki a_i jednaki nuli).

Pronaći ćemo x oblika $x = p_1^{b_1} \ldots p_s^{b_s}$ koji zadovoljava tvrdnju zadatka.

Uočimo da je

$$\begin{aligned} S(x) = x\varphi(x) &= p_1^{b_1} \ldots p_s^{b_s} \cdot p_1^{b_1-1}(p_1 - 1) \ldots p_s^{b_s-1}(p_s - 1) \\ &= p_1^{2b_1-1}(p_1 - 1) \ldots p_s^{2b_s-1}(p_s - 1). \end{aligned}$$

Također, za svaki $i \leqslant s$ vrijedi da su svi djelitelji od $p_i - 1$ u skupu $p_1, \ldots, p_s$ pa neka su $c_1, \ldots, c_s$ takvi da je

$$(p_1 - 1) \ldots (p_s - 1) = p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s},$$

odnosno

$$2S(x) = p_1^{2b_1+c_1-1} \ldots p_s^{2b_s+c_s-1}.$$

Da bi x zadovoljavao uvjete zadatka, nužno je i dovoljno da vrijedi da je $2b_i + c_i - 1$ djeljivo s n i $b_i \geqslant a_i$, za sve $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Budući da je n neparan, njegovi višekratnici su naizmjence parni i neparni, pa za svaki i možemo odabrati $k_i \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $k_i n \equiv c_i - 1 \pmod 2$ i $b_i = \frac{k_i n - c_i + 1}{2} \geqslant a_i$.

Tada je $2S(x) = p_1^{2b_1+c_1-1} \ldots p_s^{2b_s+c_s-1} = (p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s})^n$, što je i trebalo pokazati.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

završni test za izbor MEMO ekipe

12. svibnja 2012.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(y + f(x)) - f(x + f(y)) = f(x - y)(f(x + y) - 1).$$

Rješenje.

Ako u početnu jednadžbu uvrstimo $x = y$ dobijemo

$$0 = f(0)(f(2x) - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prvi slučaj: $f(0) \neq 0$

Tada je

$$f(2x) - 1 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Provjerom dobijemo da je ova funkcija zaista rješenje početne funkcijske jednadžbe.

Drugi slučaj: $f(0) = 0$

Ako uvrstimo $y = 0$ u početnu jednadžbu dobijemo

$$f(f(x)) - f(x) = f(x)(f(x) - 1), \quad \text{tj.}$$
$$f(f(x)) = f(x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$\star$}$$

Zamjenom x i y dobijemo

$$f(x + f(y)) - f(y + f(x)) = f(y - x)(f(x + y) - 1),$$

što zbrojeno s početnom jednadžbom daje

$$0 = (f(x + y) - 1)(f(x - y) + f(y - x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ako u gornju jednadžbu sad uvrstimo $y = -x$ dobijemo

$$0 = (f(0) - 1)(f(2x) + f(-2x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pa zbog $f(0) = 0$ slijedi

$$f(2x) = -f(-2x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

čime smo dokazali da je funkcija neparna.

Sada slijedi da je

$$f(f(x)) \overset{(\star)}{=} f(x)^2 = (-f(-x))^2 = f(-x)^2 \overset{(\star)}{=} f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)), \tag{$\circ$}$$

i to za svaki $x \in \mathbb{R}$

Na kraju iz $(\circ)$ i $(\star)$ dobivamo

$$2f(f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2f(x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lako se provjeri da je ova funkcija također rješenje.

Zadatak 2.

Neka je A sedmeročlani podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$. Dokaži da postoje dva različita neprazna podskupa od A takva da su zbrojevi njihovih elemenata jednaki.

Rješenje.

Dokazat ćemo jaču tvrdnju, a to je da se već među najviše četveročlanim podskupovima skupa A mogu naći dva sa jednakom sumom elemenata. Skup A ukupno ima

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 98$$

najviše četveročlanih podskupova. Suma elemenata svakog od tih skupova je barem 1, a najviše $26 + 25 + 24 + 23 = 98$. Pretpostavimo da među njima ne postoje dva sa jednakom sumom elemenata. Tada je svaki prirodni broj između 1 i 98 suma elemenata nekog najviše četveročlanog podskupa od A. Posebno, to vrijedi za broj 98 koji zbog maksimalnosti mora biti suma elemenata skupa $\{23, 24, 25, 26\} \subset A$. Međutim, očito je da dvočlani podskupovi $\{23, 26\}$ i $\{24, 25\}$ ($\subset A$) imaju jednaku sumu elemenata, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

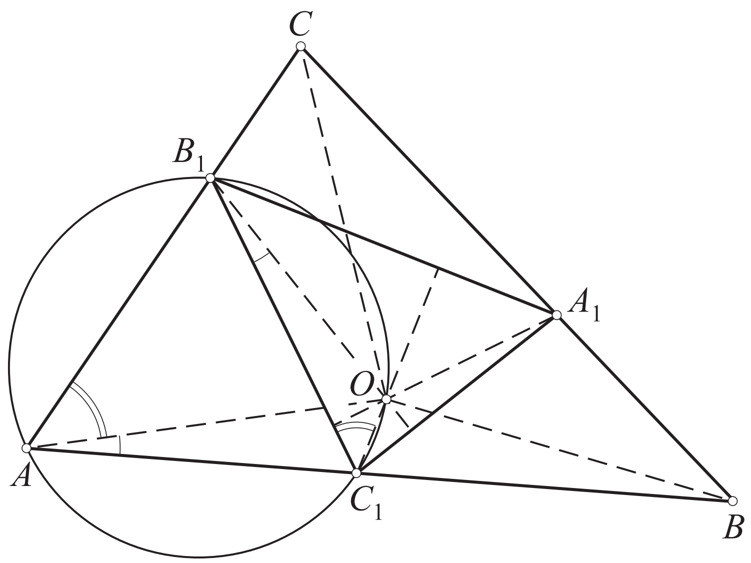
Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut i neka su A_1, B_1, C_1 redom točke na njegovim stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

Dokaži da su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ slični ($\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$) ako i samo ako se ortocentar trokuta $A_1B_1C_1$ podudara sa središtem opisane kružnice trokuta ABC.

Rješenje.

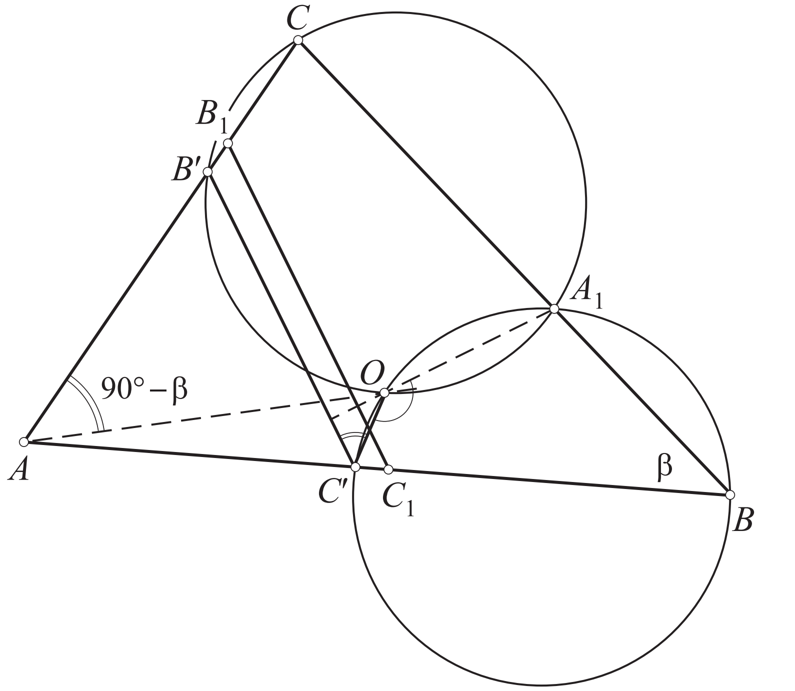
Neka je trokut $A_1B_1C_1$ sličan trokutu ABC ($\sphericalangle A = \sphericalangle A_1 = \alpha$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = \beta$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1 = \gamma$), a točka O ortocentar trokuta $A_1B_1C_1$. Tada je $\sphericalangle OB_1C_1 = 90^\circ - \gamma$, $\sphericalangle OC_1B_1 = 90^\circ - \beta$ pa slijedi $\sphericalangle B_1OC_1 = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma$. Kako je $\sphericalangle B_1AC_1 + \sphericalangle B_1OC_1 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, četverokut AC_1OB_1 je tetivan. Zbog toga je $\sphericalangle OAB_1 = OC_1B_1 = 90^\circ - \beta$ i $\sphericalangle OAC_1 = \sphericalangle OB_1C_1 = 90^\circ - \gamma$. Analogno, zbog tetivnosti četverokuta BA_1OC_1 i CB_1OA_1, dobivamo $\sphericalangle OBC_1 = 90^\circ - \gamma$, $\sphericalangle OBA_1 = 90^\circ - \alpha$ te $\sphericalangle OCA_1 = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle OCB_1 = 90^\circ - \beta$, što znači da je O središte opisane kružnice trokuta ABC.



Sada pretpostavimo da je točka O ortocentar trokuta $A_1B_1C_1$ i središte opisane kružnice trokuta ABC. Označimo $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ i $\sphericalangle A_1 = \alpha_1$, $\sphericalangle B_1 = \beta_1$, $\sphericalangle C_1 = \gamma_1$. Neka su točke B' na $\overline{CA}$ i C' na $\overline{AB}$ takve da su četverokuti $CB'OA_1$ i BA_1OC' tetivni. Tada je i četverokut $AC'OB'$ tetivan. Zbog toga je $\sphericalangle OC'B' = \sphericalangle OAB' = \sphericalangle OAC = 90^\circ - \beta$. Kako je suplement kuta $\sphericalangle A_1OC'$ jednak β, pravac A_1O okomit je na $B'C'$. Iz toga slijedi $B'C' \parallel B_1C_1$.

Kako je točka O ortocentar trokuta $A_1B_1C_1$, pravac B_1C_1 leži između A i O i vrijedi $\sphericalangle B_1OC_1 = 180^\circ - \alpha_1$.

Kako je $A_1OB'C$ tetivan, $\sphericalangle A_1OB' = 180^\circ - \gamma$ i analogno $\sphericalangle A_1OC' = 180^\circ - \beta$. Zbroj tih dvaju kutova je $180^\circ + \alpha$ pa stoga pravac $B'C'$ leži između A i O.



Sada možemo pretpostaviti da je pravac $B'C'$ bliže točki A nego pravac B_1C_1 (drugi slučaj dokazuje se analogno). To znači da je $\sphericalangle B'OC' \leqslant B_1OC_1$ i $\sphericalangle B'A_1C' \leqslant B_1A_1C_1$. Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\sphericalangle B'OC' + \sphericalangle B'A_1C' \leqslant \sphericalangle B_1OC_1 + \sphericalangle B_1A_1C_1. \qquad (*)$$

Kako je $\sphericalangle B'A_1C' = \sphericalangle B'A_1O + \sphericalangle OA_1C' = \sphericalangle B'CO + \sphericalangle OBC' = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OBA = 90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma = \alpha$, vrijedi $\sphericalangle B'OC' + \sphericalangle B'A_1C' = 180^\circ - \alpha + \alpha = 180^\circ$.

Također, $\sphericalangle B_1OC_1 + \sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \alpha_1 + \alpha_1 = 180^\circ$.

Stoga u $(*)$ vrijedi jednakost, a to je moguće samo ako je $\sphericalangle B'OC' = \sphericalangle B_1OC_1$ i $\sphericalangle B'A_1C' = \sphericalangle B_1A_1C_1$, t.j. ako je $\alpha_1 = \alpha$, a pravci $B'C'$ i B_1C_1 se podudaraju. Tada je također $\beta_1 = \beta$ i $\gamma_1 = \gamma$, pa su trokuti $A_1B_1C_1$ i ABC slični.

Zadatak 4.

Dokaži da za bilo koji prirodni broj d postoji prirodni broj n djeljiv brojem d, takav da u njegovom dekadskom zapisu možemo izbrisati neku znamenku različitu od nule, tako da dobiveni broj bude također djeljiv brojem d.

Rješenje.

Zapišimo broj n u obliku $10^k(10a+b)+c$ pri čemu je $0 \leqslant c < 10^k$ te a, b znamenke. Poslije brisanja znamenke b dobivamo broj $n_1 = 10^k a + c$. Budući da je $n - n_1 = 10^k(9a+b)$ da bismo zadovoljili uvjete zadatka dovoljno je da d dijeli $9a+b$ i $10^k a + c$.

Znamenku b možemo odabrati tako da 9 dijeli $d-b$ i staviti $a = \frac{d-b}{9}$. Tada je $d = 9a+b$. Neka je k takav da je $10^{k-1} > d$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje brojevi q i $0 \leqslant r < d$ takvi da je $10^k a + 10^{k-1} = dq + r$. Ako stavimo $c = 10^{k-1} - r > 0$, onda je $10^k a + c = dq$, što je broj djeljiv s d.