HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 18. travnja 2015.

Zadatak 1.

Neka m prirodni broj. Dano je 2^m papira i na svakom od njih napisan je broj 1. U svakom potezu dozvoljeno je izabrati dva različita papira, pobrisati brojeve a i b koji pišu na tim papirima te na oba papira napisati broj $a+b$.

Dokaži da nakon $2^{m-1}m$ poteza zbroj brojeva na svim papirima iznosi najmanje 4^m.

Rješenje.

Označimo sa S_k i P_k zbroj i umnožak svih brojeva na papirima nakon k-tog poteza. Budući da u svakom potezu uzmemo dva papira na kojima pišu a i b i zamijenimo ih s $a+b$ i $a+b$, za umnoške brojeva u k-tom i $(k+1)$-vom potezu vrijedi

$$P_{k+1} = \frac{P_k}{ab} \cdot (a+b)^2.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{(a+b)^2}{ab} \geqslant 4.$$

Budući da je $P_0 = 1$, slijedi da je $P_k \geqslant 4^k$ i posebno $P_{m2^{m-1}} \geqslant 4^{m2^{m-1}}$. Primjenom A–G nejednakosti na 2^m brojeva koji pišu na papirima nakon $m2^{m-1}$ koraka, slijedi

$$S_{m2^{m-1}} \geqslant 2^m \cdot \sqrt[2^m]{P_{m2^{m-1}}} \geqslant 2^m \cdot \left(4^{m2^{m-1}}\right)^{\frac{1}{2^m}} = 2^m \cdot 4^{\frac{m}{2}} = 4^m.$$

Zadatak 2.

Čarobna triangulacija je podjela trokuta na manje trokute konačnim brojem dužina čiji su krajevi vrhovi trokuta ili točke u njegovoj unutrašnjosti, pri čemu se u svakoj od tih točaka (uključujući vrhove trokuta) sastaje jednak broj dužina.

Na koliko najviše manjih trokuta trokut može biti podijeljen čarobnom triangulacijom?

Rješenje.

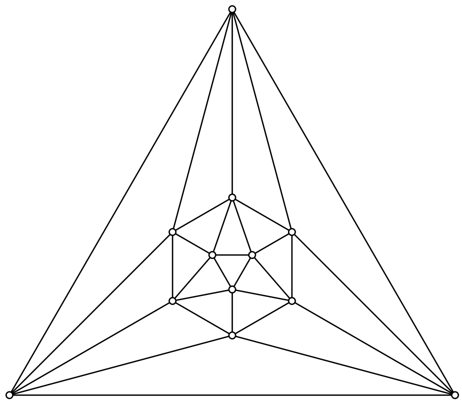
Neka n označava broj manjih trokuta, t broj točaka triangulacije (uključujući vrhove danog trokuta), d broj dužina (uključujući stranice danog trokuta), a k broj dužina koje se sastaju u svakoj točki triangulacije.

Očito vrijedi $t \cdot k = 2 \cdot d$. Nadalje, d dužina su stranice $n+1$ trokuta pa vrijedi $2d = 3(n+1)$ jer je svaka dužina stranica točno dva trokuta.

Konačno, promotrimo zbroj svih unutarnjih kutova manjih trokuta. S jedne strane, taj zbroj iznosi $n \cdot 180°$. S druge strane, u svakoj od $t-3$ točaka u unutrašnjosti trokuta taj zbroj kutova iznosi $360°$ pa kad tome prirodamo kutove velikog trokuta dobijemo da zbroj unutarnjih kutova manjih trokuta iznosi $180° + (t-3) \cdot 360°$. Stoga je $n \cdot 180° = 180° + (t-3) \cdot 360°$, odnosno $2t = n + 5$. Iz ovih jednadžbi dobijemo da je

$$n = \frac{5k-6}{6-k} = \frac{24}{6-k} + 5.$$

Dakle, $6 - k$ je djelitelj broj 24 i jedine mogućosti za koje se dobije da n prirodan broj su $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, odnosno $n \in \{1, 3, 7, 19\}$. Najveća moguća vrijednost broja manjih trokuta je 19, a primjerom pokazujemo da se to zaista može postići.



Napomena: Umjesto promatranja zbroja unutarnjih kutova manjih trokuta, za dobivanje treće jednadžbe koja povezuje promatrane brojeve možemo iskoristiti Eulerovu formulu za planarne grafove:

$$v - e + f = 2,$$

pri čemu je v broj vrhova grafa, e broj bridova grafa, a f broj područja (uključujući vanjsko, neomeđeno područje). Prema našim oznakama, broj vrhova je t, broj bridova je d, a broj područja je $n + 1$ pa dobijemo da vrijedi

$$t - d + n = 1.$$

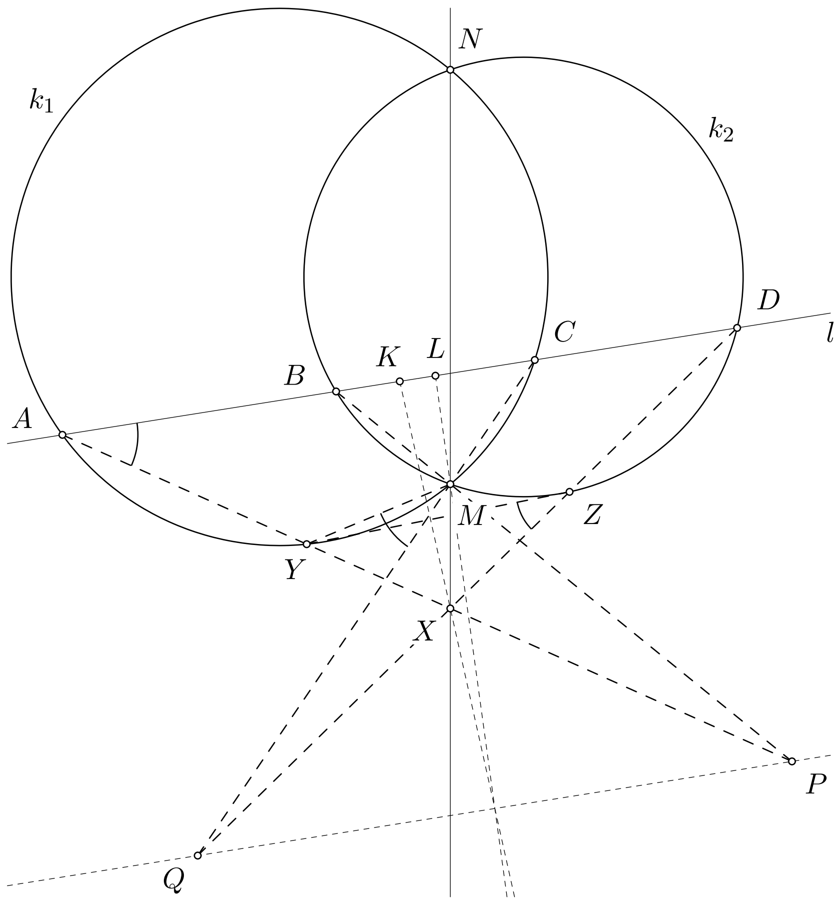
Zadatak 3.

Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama M i N. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama A i C, a kružnicu k_2 u točkama B i D tako da se točke A, B, C i D na pravcu l nalaze u tom poretku. Neka je X točka na pravcu MN takva da se točka M nalazi između točaka X i N. Neka je P sjecište pravaca AX i BM, a Q sjecište pravaca DX i CM.

Ako je K polovište dužine $\overline{AD}$, a L polovište dužine $\overline{BC}$, dokaži da se pravci XK i ML sijeku na pravcu PQ.

Rješenje.

Neka je Y drugo sjecište kružnice k_1 s pravcem AX i neka je Z drugo sjecište kružnice k_2 i pravca DX.



Kako pravci AY, DZ i MN prolaze točkom X, prema obratu teorema o radikalnom središtu, četverokut $AYZD$ je tetivan. Zato vrijedi $\sphericalangle YZX = \sphericalangle XAD$.

Kako je $AYMC$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle YMQ = \sphericalangle YAC = \sphericalangle XAD$ pa je $\sphericalangle YMQ = \sphericalangle YZX = \sphericalangle YZQ$ i slijedi da je četverokut $QYMZ$ tetivan.

Analogno se dokazuje da je četverokut $PYMZ$ tetivan pa točke P, Q, Z, Y, M leže na istoj kružnici. Odatle slijedi $\sphericalangle QPY = \sphericalangle QZY = \sphericalangle XAD$ pa je $PQ \parallel AD$.

Stoga su $ADPQ$ i $BCPQ$ trapezi, a kako se polovišta osnovica trapeza i sjecište njegovih dijagonala nalaze na istom pravcu, zaključujemo da pravci KX i LM prolaze polovištem dužine $\overline{PQ}$. Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Dokaži da niz

$$a_k = \left\lfloor \frac{2^k}{k} \right\rfloor, \quad k \in \mathbb{N}$$

sadrži beskonačno mnogo neparnih brojeva.

($\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenje.

Za proizvoljni $k = 3 \cdot 4^l$, pri čemu je l prirodni broj, imamo

$$\frac{2^k}{k} = \frac{2^{3\cdot 4^l}}{3 \cdot 4^l} = \frac{2^{3\cdot 4^l - 2l}}{3} = \frac{2^{3\cdot 4^l - 2l} - 1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Budući da je broj $3 \cdot 4^l - 2l$ prirodan i paran, vrijedi $2^{3\cdot 4^l - 2l} \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$ pa je broj $2^{3\cdot 4^l - 2l} - 1$ prirodan, neparan i djeljiv s 3.

Zato je i

$$a_k = \left\lfloor \frac{2^k}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{3\cdot 4^l - 2l} - 1}{3} + \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{2^{3\cdot 4^l - 2l} - 1}{3}$$

neparan, čime smo dokazali tvrdnju.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 19. travnja 2015.

Zadatak 1.

Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}\geqslant\frac{(x+y+z)^3}{3[x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1)]}.$$

Rješenje.

Iz CSB nejednakosti imamo da je

$$\left(\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}\right)\cdot[x(xy+z)+y(yz+x)+z(zx+y)]\geqslant(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2. \quad (1)$$

Nejednakost među sredinama nam daje

$$\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\geqslant\frac{x+y+z}{3},$$

odnosno

$$(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2\geqslant\frac{(x+y+z)^3}{3}. \quad (2)$$

Iz A–G nejednakosti slijedi

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx \quad (3)$$

Sada iz (1), (2) i (3) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}&\geqslant\frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+zx+xy+yz}\\&\geqslant\frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+x^2+y^2+z^2}\\&\geqslant\frac{(x+y+z)^3}{3[x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1)]}.\end{aligned}$$

Zadatak 2.

Dan je prirodni broj N. U svakom polju tablice $N\times N$ na početku je upisana nula. U svakom potezu dozvoljeno je odabrati redak ili stupac, obrisati sve brojeve koji se nalaze u njemu i upisati brojeve od 1 do N proizvoljnim redom. Koliko maksimalno može iznositi zbroj svih brojeva u tablici?

Rješenje.

Prvo ćemo dokazati sljedeću tvrdnju:

Neka je k prirodan broj. Dan je pravokutnik dimenzija $m \times n$ $(m, n \geqslant k)$ kojemu su na početku sva polja bijela. U svakom potezu možemo odabrati neki redak ili stupac i prebojati polja u njemu tako da ima najviše k crnih polja (ostala su bijela). Tada će u svakom trenutku u pravokutniku biti najmanje $(m-k) \cdot (n-k)$ bijelih polja.

Gornju tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po broju polja u pravokutniku.

Za $m = k$ ili $n = k$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo sad da su $m, n > k$ i da tvrdnja vrijedi za sve pravokutnike dimenzija manjih od $m \times n$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da smo u zadnjem potezu radili transformaciju na nekom retku, tj. bojali ga. Tada se u tom retku nalazi barem $n - k$ bijelih polja. Ako isključimo taj redak možemo pretpostaviti da su se sva prijašnja bojanja odvijala na pravokutniku dimenzija $(m-1) \times n$. Po pretpostavci indukcije taj manji pravokutnik ima barem $(m-1-k) \cdot (n-k)$ bijelih polja, što znači da naš promatrani $m \times n$ pravokutnik ima barem

$$(n-k) + (m-1-k)(n-k) = (m-k)(n-k)$$

bijelih polja. Time je tvrdnja dokazana.

Neka je sad $m = n = N$ i pretpostavimo da se nakon nekoliko poteza u tablici nalazi A_i brojeva i $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Ako uzmemo da su nam polja u kojima piše broj N crna, a sva ostala bijela, u tom slučaju je $k = 1$ i gornja tvrdnja nam daje

$$A_N \leqslant N^2 - (N-1)^2.$$

Ako uzmemo da su nam polja u kojima pišu brojevi $N-1$ i N crna, a sva ostala bijela, onda vrijedi da je $k = 2$ i dobijemo

$$A_{N-1} + A_N \leqslant N^2 - (N-2)^2.$$

Općenito, ako uzmemo da su nam polja u kojima pišu brojevi $S+1, \ldots, N-1, N$ $(S = N-1, N-2, \ldots, 0)$ crna, a sva ostala bijela, onda je $k = N - S$ i iz gornje tvrdnje slijedi

$$A_{S+1} + \cdots + A_N \leqslant N^2 - S^2.$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti za $S = N-1, N-2, \ldots, 0$ dobijemo

$$\begin{aligned}
&N \cdot A_N + (N-1)A_{N-1} + (N-2)A_{N-2} + \cdots + 2A_2 + A_1 \\
&\leqslant N \cdot N^2 - ((N-1)^2 + (N-2)^2 + \cdots + 0^2) \\
&= N^3 - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = \frac{4N^3 + 3N^2 - N}{6}.
\end{aligned}$$

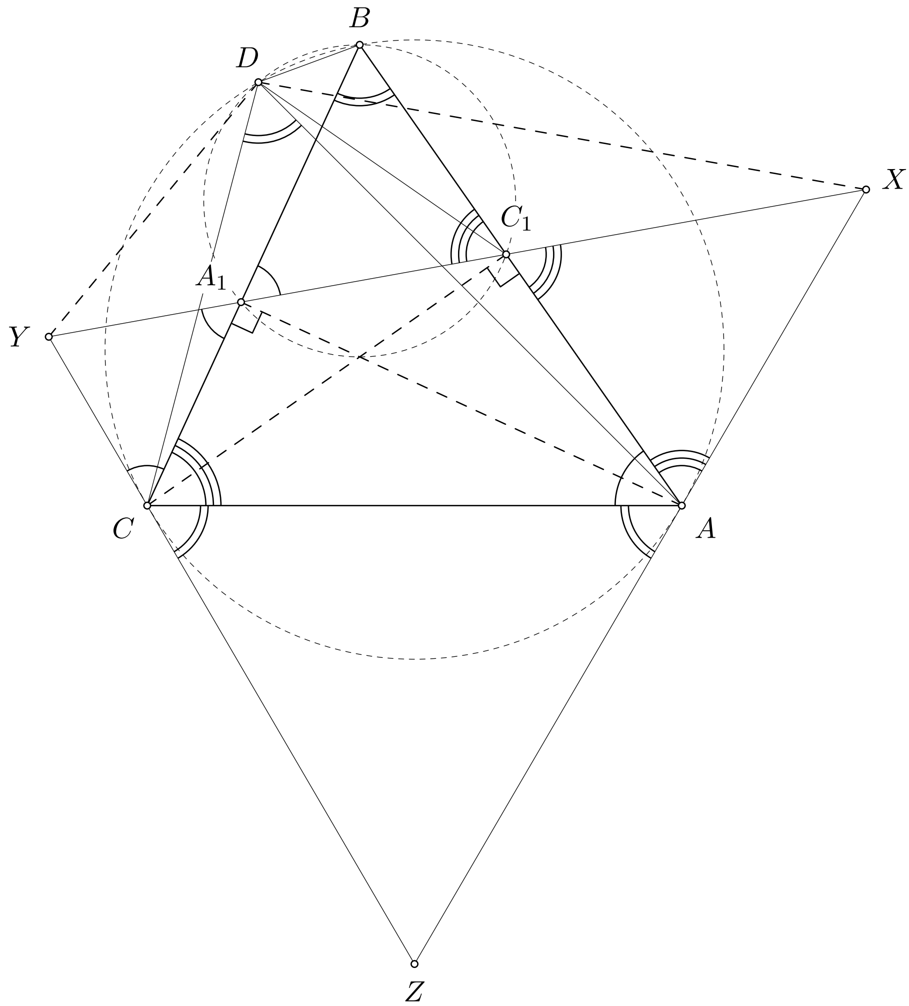
Zadatak 3.

U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|AB| > |BC|$, a točke A_1 i C_1 su redom nožišta visina iz vrhova A i C. Neka je D drugo sjecište kružnica opisanih trokutima ABC i A_1BC_1 (različito od B). Neka je Z sjecište tangenata na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A i C, te neka se pravci ZA i A_1C_1 sijeku u točki X, a pravci ZC i A_1C_1 u točki Y.

Dokaži da točka D leži na kružnici opisanoj trokutu XYZ.

Prvo rješenje.

Neka su $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$ veličine kutova trokuta ABC.



Zbog $\sphericalangle CAZ = \sphericalangle ZCA = \beta$ (kut između tetive i tangente) slijedi $\sphericalangle XZY = \sphericalangle AZC = 180° - 2\beta$.

Četverokut CAC_1A_1 je tetivan, stoga je $\sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle YA_1C = \alpha$ i $\sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle AC_1X = \gamma$.

Budući da je $\sphericalangle XAC_1 = 180° - \sphericalangle CAZ - \sphericalangle BAC = 180° - \beta - \alpha = \gamma$, iz trokuta AXC_1 dobivamo $\sphericalangle C_1XA = 180° - 2\gamma$. Analogno, iz trokuta A_1YC dobivamo $\sphericalangle CYA_1 = 180° - 2\alpha$.

Pokazat ćemo da je A_1AXD tetivni četverokut. Budući da su četverokuti A_1C_1BD i $CABD$ tetivni, vrijedi $\sphericalangle C_1DB = \sphericalangle C_1A_1B = \alpha$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \gamma$, stoga je $\sphericalangle ADC_1 = \sphericalangle ADB - \sphericalangle C_1DB = \gamma - \alpha$. Nadalje je $\sphericalangle A_1DC_1 = \sphericalangle A_1BC_1 = \beta$, zbog čega je

$$\sphericalangle A_1DA = \sphericalangle A_1DC_1 - \sphericalangle ADC_1 = \beta - (\gamma - \alpha) = \alpha + \beta - \gamma = 180° - 2\gamma = \sphericalangle A_1XA,$$

pa je četverokut A_1AXD tetivan.

Slično, $\sphericalangle CDC_1 = \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADC_1 = \beta + (\gamma - \alpha) = 180° - 2\alpha = \sphericalangle CYC_1$, pa je i četverokut CC_1DY tetivan.

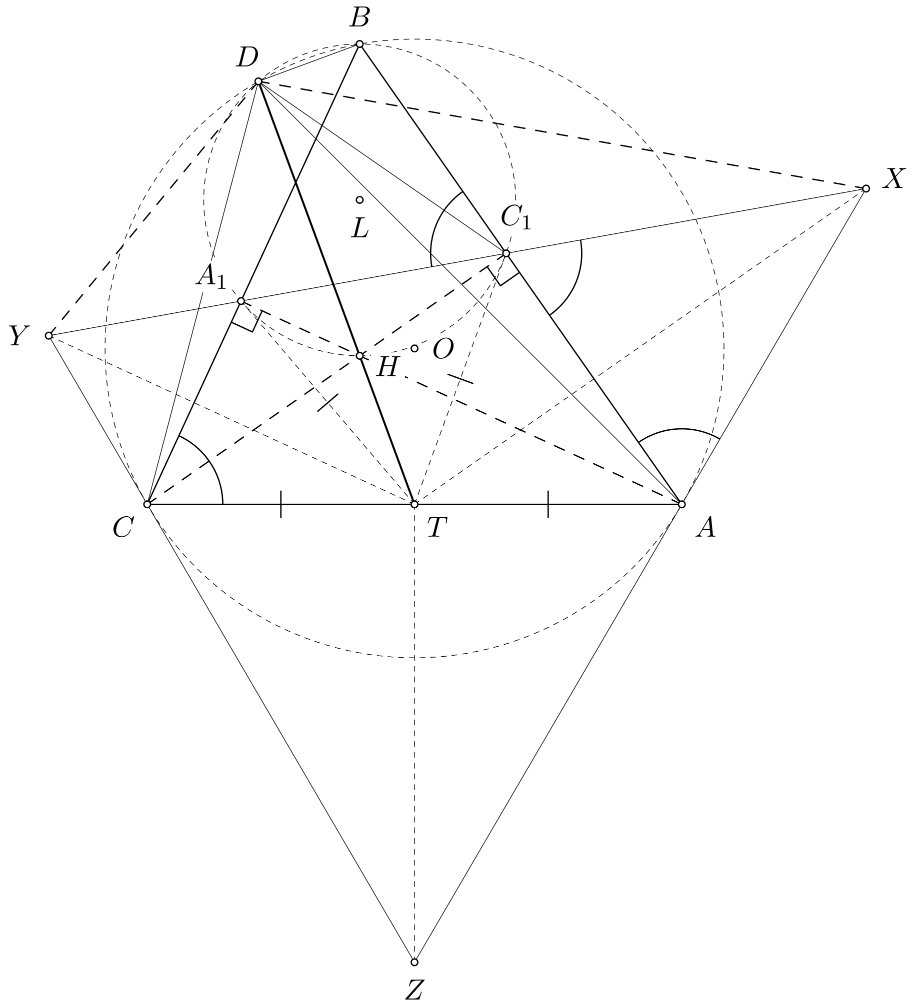
Sada imamo:

$$\begin{aligned}\sphericalangle YDX &= \sphericalangle YDC + \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADX \\ &= \sphericalangle YC_1C + \sphericalangle CBA + \sphericalangle AA_1X \\ &= \sphericalangle A_1C_1C + \sphericalangle CBA + \sphericalangle AA_1C_1 \\ &= (90^\circ - \gamma) + \beta + (90^\circ - \alpha) = 2\beta,\end{aligned}$$

stoga je $\sphericalangle XZY + \sphericalangle YDX = 180^\circ$, odakle zaključujemo da je četverokut $XDYZ$ tetivan.

Drugo rješenje.

Neka je T polovište dužine $\overline{CA}$. Iz $|CZ| = |ZA|$ slijedi da je ZT simetrala kuta $\sphericalangle AZC$.



Primijetimo da je $\sphericalangle XAB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle AC_1X$ i $|AT| = |C_1T|$ (trokut CAC_1 je pravokutan), pa je XT simetrala dužine $\overline{AC_1}$. Analogno je YT simetrala dužine $\overline{A_1C}$.

Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC, H ortocentar trokuta ABC i L polovište dužine $\overline{BH}$. Radikalna os kružnica opisanih trokutima BDH i ABC okomita je na spojnicu njihovih središta, stoga su pravci BD i OL međusobno okomiti. Budući da je i $BD \perp DH$, slijedi $LO \parallel DH$. Poznato je da je četverokut $OLHT$ paralelogram, pa je $OL \parallel HT$ i slijedi da su točke D, H i T kolinearne.

S obzirom na to da je

$$\sphericalangle TDA = \sphericalangle TDB - \sphericalangle ADB = \sphericalangle HDB - \sphericalangle ACB = 90^\circ - \sphericalangle XAB = \sphericalangle TXA,$$

četverokut $TAXD$ je tetivan.

Slično,

$$\sphericalangle CDT = \sphericalangle CDB - \sphericalangle TDB = (180^\circ - \sphericalangle BAC) - \sphericalangle HDB = 180^\circ - \sphericalangle BCY - 90^\circ = 90^\circ - \sphericalangle BCY = \sphericalangle CYT,$$

pa je i četverokut $CTDY$ tetivan.

Zato vrijedi

$$\begin{aligned}\sphericalangle YDX + \sphericalangle XZY &= \sphericalangle YDT + \sphericalangle TDX + \sphericalangle XZY \\ &= (180^\circ - \sphericalangle TCY) + (180^\circ - \sphericalangle XAT) + \sphericalangle XZY \\ &= \sphericalangle ZCA + \sphericalangle CAZ + \sphericalangle AZC = 180^\circ,\end{aligned}$$

čime smo dokazali da je četverokut $XDYZ$ tetivan.

Zadatak 4.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj i p prosti broj. Ako je broj $p-1$ djeljiv brojem n, a broj n^3-1 djeljiv brojem p, dokaži da je $4p-3$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Budući da n dijeli $p-1$, postoji prirodni broj a takav da je $p-1=an$. Uz to je $p-1 \geqslant n$.

Iz uvjeta da je $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ djeljiv prostim brojem p, slijedi da je n^2+n+1 djeljiv s p. Naime, $1 < n-1 < p$, pa $n-1$ ne može biti djeljiv s p.

Dakle, $an+1 = p \mid n^2+n+1$. Zbog toga je $1 \leqslant a \leqslant n+1$ (jer je za $a \geqslant n+2$, broj $an+1 \geqslant (n+2)\cdot n+1 = n^2+2n+1 > n^2+n+1$, što je nemoguće).

Također, iz iste djeljivosti slijedi da $an+1 \mid a\cdot(n^2+n+1) - n\cdot(an+1) = (a-1)n+a$, što je pozitivno, pa mora biti $(a-1)n+a \geqslant an+1$, iz čega je $a \geqslant n+1$.

Slijedi da je $a=n+1$, te je $p=n^2+n+1$.

Stoga je $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$.

Drugo rješenje.

Budući da n dijeli $p-1$, postoji prirodni broj a takav da je

$$p-1=an. \tag{4}$$

Nadalje, zaključujemo da je $p-1 \geqslant n$.

Iz uvjeta da je $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ djeljiv prostim brojem p, slijedi da je n^2+n+1 djeljiv s p. Naime, $1 < n-1 < p$, pa $n-1$ ne može biti djeljiv s p.

Stoga postoji prirodni broj b takav da je

$$n^2+n+1=bp. \tag{5}$$

Kombiniranjem jednakosti (4) i (5) dobivamo:

$$\begin{aligned} n^2+n+1 &= b(an+1), \\ n(n+1-ab) &= b-1. \end{aligned}$$

Označimo $c = n + 1 - ab \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$b = cn + 1. \tag{6}$$

Sada imamo:

$$n^2 + n + 1 = bp = (cn+1)(an+1) = acn^2 + (a+c)n + 1,$$

odakle oduzimanjem jedinice i dijeljenjem s n dobivamo

$$n + 1 = acn + a + c. \tag{7}$$

Ako je $c > 0$ onda je desna strana prethodne jednakosti veća od lijeve (jer su a i n prirodni brojevi). Stoga zaključujemo da je $c = 0$ pa je $b = 1$, a $p = n^2 + n + 1$.

Konačno

$$4p - 3 = 4(n^2 + n + 1) - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

Treće rješenje.

Kako je $n \geqslant 2$, iz $n \mid p - 1$ slijedi $p - 1 \geqslant 2$, pa je p neparan prost broj.

Iz $n \geqslant 2$ i $n \mid 3 - 1$ bi slijedilo $n = 2$, ali ne vrijedi da $3 \mid 2^3 - 1$. Dakle, $p \neq 3$, pa je $p \geqslant 5$.

Iz uvjeta da je $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ djeljiv prostim brojem p, slijedi da je $n^2 + n + 1$ djeljiv s p. Naime, $1 < n - 1 < p$, pa $n - 1$ ne može biti djeljiv s p.

Postoje $k, t \in \mathbb{N}$ takvi da je $kn = p - 1$ i $tp = n^3 - 1$. Faktorizacijom razlike kubova dobivamo:

$$tp = (n-1)(n^2+n+1) = (n-1)\left((n-1)^2 + 3n\right) = (n-1)\left((n-1)^2 + 3(n-1) + 3\right).$$

Iz $tp = n^3 - 1$ slijedi

$$\begin{aligned} t(kn+1) &= n^3 - 1 \\ t + 1 &= n^3 - nkt \\ t + 1 &= n(n^2 - kt) \end{aligned}$$

pa je $n^2 - kt \geqslant 1$ (jer je s lijeve strane prirodan broj).

Iz $p \mid n^2 + n + 1$ slijedi da je $p \leqslant n^2 + n + 1$. Iz toga i iz $tp = (n^2 + n + 1)(n - 1)$ proizlazi da je $t \geqslant n - 1$. Slijedi da je $1 \leqslant n^2 - kt \leqslant n^2 - k(n-1) = n^2 - kn + k$, odnosno redom

$$\begin{aligned} n^2 - kn + k - 1 &\geqslant 0 \\ (n-1)(n+1) - k(n-1) &\geqslant 0 \\ (n-1)(n+1-k) &\geqslant 0, \end{aligned}$$

pa, budući da je $n - 1 > 0$, slijedi da je i $n + 1 - k \geqslant 0$.

Iz $p \mid n^2 + n + 1$ slijedi da $p \mid n^2 + n + p - nk$, tj. $p \mid n(n + 1 - k)$. Kako je $M(p, n) = M(kn + 1, n) = 1$, slijedi da $p \mid n + 1 - k$. Ako je $n + 1 - k > 0$, imamo $p \leqslant n + 1 - k$, tj. $kn + 1 \leqslant n + 1 - k$, $kn \leqslant n - k$, $k(n+1) \leqslant n$, iz čega je $n \geqslant n + 1$, što nije istina.

Zato je $n + 1 - k = 0$, tj. $k = n + 1$ pa i $p = kn + 1 = (n+1)n + 1 = n^2 + n + 1$. Konačno je $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 25. travnja 2015.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(f(x))(x - f(y)) + 2xy = f(x)f(x+y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

Rješenje.

Označimo $a = f(0)$. Ako uvrstimo $x = y = 0$ u danu jednadžbu, dobivamo

$$f(a)(-a) = a^2, \tag{8}$$

što povlači $a = 0$ ili $a = -f(a)$.

Ako uvrstimo $x = a$, $y = 0$ u danu jednadžbu, dobivamo $f^2(a) = 0$, što u kombinaciji s uvjetom (8) daje $a = 0$, tj. $f(0) = 0$.

Uvrstimo li $y = 0$ u danu jednadžbu, dobivamo

$$xf(f(x)) = f^2(x). \tag{9}$$

Označimo $b = f(1)$. Uvrstimo li $x = 1$ u (9) dobivamo

$$f(b) = b^2. \tag{10}$$

Uvrstimo li $x = 1$, $y = b$ u danu jednadžbu, te iskoristimo (10) dobivamo

$$b^2(1 - b^2) + 2b = bf(b+1). \tag{11}$$

Slično, uvrstimo li $x = b$, $y = 1$ u danu jednadžbu, te iskoristimo (10) dobivamo

$$2b = b^2 f(b+1). \tag{12}$$

Ako je $b = 0$, uvrstimo li $x = 1$ u danu jednadžbu, dobivamo us $2y = 0$, što očito nije moguće za sve $y \in \mathbb{R}$. Dakle, $b \neq 0$ i iz (12) dobivamo

$$bf(b+1) = 2. \tag{13}$$

Iz (11) i (13) Slijedi

$$b^2(1 - b^2) + 2b = 2,$$
$$(b-1)^2(b^2 + 2b + 2) = 0.$$

Jedini realni broj koji zadovoljava ovu jednadžbu je $b = 1$. Dakle, $f(1) = 1$.

Uvrstimo li $x = 1$, $y = x$ u danu jednadžbu, dobivamo

$$f(x+1) + f(x) = 2x + 1. \tag{14}$$

Uvrstimo li $y = 1$ u danu jednadžbu, te iskoristimo (9) dobivamo

$$f^2(x)(x-1) + 2x^2 = xf(x)f(x+1). \tag{15}$$

Za dani x, neka je $t = f(x)$. Iz (14) i (15) dobivamo

$$\begin{gathered} t^2(x-1) + 2x^2 = xt(2x+1-t), \\ (t-x)(2tx - t - 2x) = 0. \end{gathered}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = x \quad \text{or} \quad f(x) = \frac{2x}{2x-1}.$$

Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq x\}$. Iz (14) zaključujemo $x \in S \implies x+1 \in S$. Dakle, skup S je prazan ili beskonačan. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Ako odaberemo proizvoljni $x \in S$, imamo

$$f(x) = \frac{2x}{2x-1} \quad \text{and} \quad f(x+1) = \frac{2x+2}{2x+1}. \tag{16}$$

Iz (14) i (16) dobivamo

$$\begin{gathered} \frac{2x+2}{2x+1} + \frac{2x}{2x-1} = 2x + 1, \\ 8x^3 - 4x^2 - 6x + 1 = 0. \end{gathered}$$

Ova jednadžba ima najviše tri različita rješenja, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je S beskonačan skup. Dakle, S je prazan skup i $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Laganom provjerom vidimo da je to zaista rješenje.

Zadatak 2.

U nekoj državi je N gradova, među nekima postoje (dvosmjerne) avionske linije. Svaki let povezuje točno dva grada. Nijedan grad nije povezan izravnim letovima sa svim ostalim gradovima. Poznato je da za svaka dva grada A i B postoji točno jedan način da se dođe iz A u B koristeći najviše dva leta. Dokaži da je $N - 1$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Neka je a proizvoljan grad i neka je povezan s gradovima $x_1, \ldots, x_k$. Označimo sa B_i tskup svih gradova koji su povezani s gradom x_i različitih od a, za $i = 1, \ldots, k$. Skupovi $B_1, \ldots, B_k$ su u parovima disjunktni jer postoji točno jedan način da se dođe iz x_i u x_j koristeći najviše dva leta.

Ako promotrimo dva indeksa i, j te proizvoljan grad $y \in B_i$, onda postoji jedinstveni grad $z \in B_j$ tako da su y i z povezani (jer mora postojati način da se dođe iz y u x_j u najviše dva leta i nema izravnih letova).

Zaključujemo da svaki eleement nekog skupa B_i ima točno k veza i da svi skupovi B_i imaju isti broj elemenata. Neka je m broj elemenata skupova B_i. Tada je $N = 1 + k + km$.

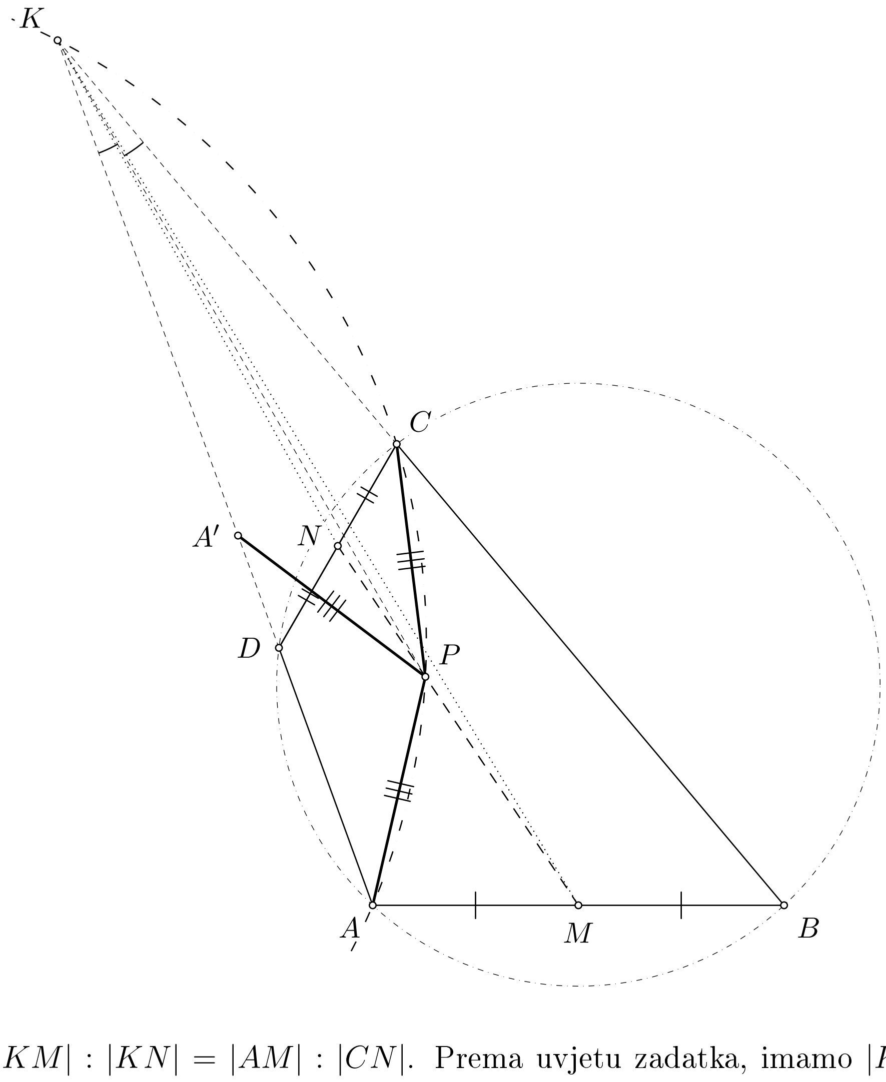
Nadalje, promotrimo neki grad $b \in B_1$. Taj grad je povezan s gradom x_1 i s točno jednim gradom $c_i \in B_i$ za $i = 2, \ldots, k$. Uočimo da je x_i povezan s gradom c_i za $i = 2, \ldots, k$. Na isti način kao i prije (koristeći b umjesto a) zaključujemo da gradovi x_i (za $i = 2, \ldots, k$) imaju k veza. No, već znamo da gradovi x_i imaju $m + 1$ veza (jednu s gradom a, te m u gradove u B_i). Dakle, $k = m + 1$ i $N - 1 = k + km = k^2$.

Zadatak 3.

U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle DAB = 110°$, $\sphericalangle ABC = 50°$, $\sphericalangle BCD = 70°$. Neka su M i N polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Za točku P na dužini $\overline{MN}$ vrijedi $|AM| : |CN| = |MP| : |NP|$ i $|AP| = |CP|$. Odredi veličinu $\sphericalangle APC$.

Rješenje.

Neka je K presjek pravaca AD i BC. Budući da je $ABCD$ tetivni četverokut, trokuti AKB i CKD su slični. Točke M i N su polovišta odgovarajućih dužina, pa je $\sphericalangle AKM = \sphericalangle CKN$. Slijedi da su trokuti AKM i CKN također slični.



Dakle vrijedi $|KM| : |KN| = |AM| : |CN|$. Prema uvjetu zadatka, imamo $|KM| : |KN| = |MP| : |NP|$. Zaključujemo da je KP simetrala kuta $\sphericalangle NKM$, što povlači da je KP simetrala kuta $\sphericalangle AKC$.

Pokazat ćemo da je četverokut $APCK$ tetivan. Zaista, neka je točka $A' \neq A$ na pravcu KA takva da je $|A'P| = |AP| = |CP|$. Trokuti $KA'P$ i KCP su sukladni, a četverokut $A'PCK$

je deltoid. Budući da je trokut $A'AP$ jednakokračan, slijedi $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PAA' = \sphericalangle AA'P = 180° - \sphericalangle PA'K = 180° - \sphericalangle KCP$. Dakle, $APCK$ je tetivni četverokut.

Budući da je $\sphericalangle AKC = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle CBA = 20°$, slijedi $\sphericalangle CPA = 160°$.

Zadatak 4.

Dokaži da za svaki prirodni broj n postoje prirodni brojevi a i b takvi da je broj $4a^2 + 9b^2 - 1$ djeljiv brojem n.

Rješenje.

Ako je n neparan broj, zapišimo $n = 2k + 1$ za neki nenegativni cijeli broj k. Za $a = k$ i $b = 0$ imamo $4a^2 + 9b^2 - 1 = (2k + 1)(2k - 1)$, pa n dijeli $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Ako n nije djeljiv sa 3, neka je $n = 3k + r$ za nenegativni cijeli broj k i $r \in \{1, -1\}$. Za $a = 0$ i $b = k$ imamo $4a^2 + 9b^2 - 1 = (3k + 1)(3k - 1)$, pa n dijeli $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Ako je n djeljiv sa 6, neka je $n = 2^r 3^s m$ za prirodne brojeve r, s i m tako da je m relativno prost sa 6. Budući da su 2^r i $3^s m$ relativno prosti, postoje cijeli brojevi k i l takvi da je $2^r k + 3^s ml = 1$. Kvadrirajući ovu jednakost dobivamo

$$2^{2r}k^2 + 3^{2s}m^2l^2 + 2 \cdot 2^r 3^s mkl = 1,$$

tj. $-2nkl = 2^{2r}k^2 + 3^{2s}m^2l^2 - 1$. Za $a = 2^{r-1}k$ i $b = 3^{s-1}ml$ imamo $4a^2 + 9b^2 - 1 = 2^{2r}k^2 + 3^{2s}m^2l^2 - 1$, pa n dijeli $4a^2 + 9b^2 - 1$, čime je dokaz završen.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 25. travnja 2015.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

Rješenje.

Uvrstimo li $x = 0$ u jednadžbu, dobivamo $f(f(0)) = f(0) + yf(0)$ za sve $y \in \mathbb{R}$. To povlači $f(0) = 0$. Neka je $f(1) = c$ i uvrstimo $x = 1$. Slijedi $f(c + f(y)) = c(1 + y)$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Ako je $c = 0$, onda je $f(f(y)) = 0$ za sve $y \in \mathbb{R}$. Primijenimo li f na danu jednadžbu, slijedi $0 = f(f(x^2) + yf(x))$. Pretpostavimo da je $f(t) \neq 0$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ tako da je $t = f(t^2) + yf(t)$ i dobivamo $0 = f(f(t^2) + yf(t)) = f(t) \neq 0$, što je kontradikcija. Dakle, u ovom slučaju $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Ako je $c \neq 0$, onda slijedi da je f injektivna. Uvrstimo li $y = 0$, dobivamo $f(xf(x)) = f(x^2)$, tj. $f(x) = x$ za sve $x \neq 0$. Budući da znamo $f(0) = 0$, zaključujemo da je $f(x) = x$ još jedno rješenje.

Lako je provjeriti da su $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$ zaista rješenja.

Zadatak 2.

U konveksnom N-terokutu nacrtane su neke dijagonale. Za nacrtanu dijagonalu kažemo da je *dobra* ako se siječe s točno jednom od ostalih nacrtanih dijagonala (vrhove ne ubrajamo u sjecišta). Odredi najveći mogući broj dobrih dijagonala.

Rješenje.

Neka je $M(n)$ najveći mogući brojdobrih dijagonala u konveskon n-terokutu.

Dokazat ćemo da je $M(n) = n-2$ ako je n paran i $M(n) = n-3$ ako je n neparan. Za bilo koji n, nacrtamo svih $n-3$ dijagonala iz nekog vrha A i još jednu dijagonalu koja spaja dva vrha susjedna vrhu A ako je $n > 3$. Matematičkom indukcijom pokazujemo da je $M(n) \geqslant n-2$ ako je n paran. Za $n = 4$ tvrdnja je istinita jer su obje dijagonale konveksnog četverokuta dobre. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$ i promotrimo konveksan n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$. Nacrtamo dijagonale $\overline{A_{n-2}A_n}$, $\overline{A_1A_{n-1}}$ i iskoristimo pretpostvaku na mnogokut $A_1A_2\ldots A_{n-2}$. Zaključujemo da je $M(n) \geqslant M(n-2) + 2 \geqslant n-4+2 = n-2$.

Indukcijom pokazujemo da je $M(n) \leqslant n-2$ ako je n paran i $M(n) \leqslant n-3$ ako je n neparan. Očito, $M(3) = 0$ i $M(4) = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $n < k$.

Promotrimo odabir dijagonala konveksnog k-terokuta za koji se posiže $M(k)$.

Prvi slučaj: ako se dvije dobre dijagonale sijeku, one dijele k-terokut na 4 dijela, pri čemu svaki ima $a_i \geqslant 0$ vrhova, ne brojeći krajnje točke tih dijagonala (za $1 \leqslant i \leqslant 4$). Budući da nema drugih dužina koje sijeku te dvije dijagonale, imamo

$$M(k) = 2 + \sum_{i=1}^{4} M(a_i + 2) \leqslant 2 + \sum_{i=1}^{4} (a_i + 2 - 2) = 2 + (k - 4) = k - 2.$$

Ako je k neparan, onda barem jedan od brojeva $a_i$mora biti neparan, pa dobivamo ogradu $k-3$ u ovom slučaju.

Drugi slučaj: ako se nikoje dvije dobre dijagonale ne sijeku, onda automatski postoji najviše $k-3$ dobrih dijagonala kao najveći mogući broj dijagonala koje možemo povući iz jednog vrha.

Zadatak 3.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|AB| = |DB|$. Upisana kružnica trokuta BCD dodiruje pravce AC i BD redom u točkama E i F. Dokaži da pravac EF raspolavlja dužinu $\overline{DI}$.

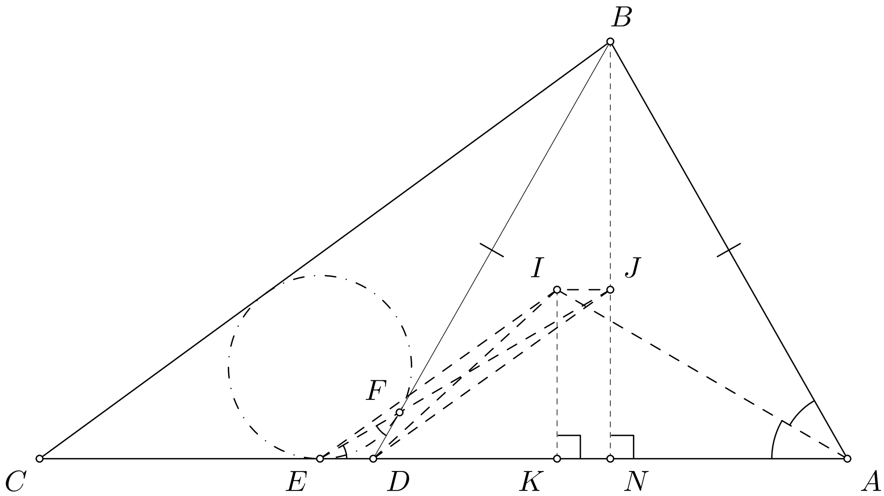
Rješenje.

Označimo sa a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom.

Neka je K diralište upisane kružnice trokuta ABC i pravca AC. Neka je N nožište visine iz vrha B u trokutu ABC i neka je J presjek pravca EF i visine $\overline{BN}$.

Primijetimo da je $\sphericalangle JNE = \sphericalangle AKI = 90°$ i

$$\sphericalangle NEJ = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle FDE) = \frac{\sphericalangle ADB}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle IAK.$$



Neka je $d = |CD|$. Tada je $|ED| = \dfrac{c+d-a}{2}$ i

$$|EN| = |ED| + |DN| = \frac{c+d-a}{2} + \frac{b-d}{2} = \frac{b+c-a}{2} = |AK|.$$

Dakle, trokuti AIK i EJN su sukladni. Slijedi $|IK| = |JN|$, pa vrijedi $|IJ| = |KN|$. Nadalje,

$$|IJ| = |KN| = |AK| - |AN| = \frac{b+c-a}{2} - \frac{b-d}{2} = \frac{c+d-a}{2} = |ED|.$$

Iz ovoga zaključujemo da je četverokut $EDJI$ paralelogram i zato se njegove dijagonale raspolavljaju.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve x i y takve da vrijedi

$$x(x^2+19)=y(y^2-10).$$

Rješenje.

Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva x i y, te neka je $x=da$ i $y=db$, pri čemu su a i b relativno prosti prirodni brojevi. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$a(d^2a^2+19)=b(d^2b^2-10),$$

što možemo zapisati i kao

$$19a+10b=d^2(b^3-a^3)=d^2(b-a)(b^2+ba+a^2).$$

Budući da prirodni broj $b-a$ dijeli desnu stranu, mora dijeliti i $19a+10b=10(b-a)+29a$. To povlači da $b-a$ dijeli $29a$. Budući da su a i b relativno prosti, takvi su $b-a$ i a. Zaključujemo da $b-a$ dijeli 29, pa je $b-a=29$ ili $b-a=1$.

Ako je $b-a=29$, jednadžba postaje $a+10=d^2(3a^2+87a+841)$. Ova jednadžba nema rješenja jer je lijeva strana manja od desne strane.

Ako je $b-a=1$, jednadžba postaje

$$29a+10=d^2(3a^2+3a+1).$$

Ako je $d\geqslant 3$, onda je lijeva strana manja od desne strane. Ako je $d=2$, onda imamo kvadratnu jednadžbu $12a^2-17a-6=0$, koja nema cjelobrojna rješenja. Ako je $d=1$, onda imamo jednadžbu $3a^2-26a-9=0$, koja ima jedno cjelobrojno rješenje $a=9$.

Dakle, jedino rješenje je $(x,y)=(9,10)$.