HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi test

29. svibnja 2020.

Zadatak 1.

Neka je n prirodni broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \qquad \text{i} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Ako je a najmanji, a b najveći broj među brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dokaži da je $ab \leqslant -\dfrac{1}{n}$.

Prvo rješenje.

Primijetimo da je $(x_i - a)(b - x_i) \geqslant 0$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stoga je

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)(b - x_i) = (a + b) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot ab - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -n \cdot ab - 1,$$

iz čega slijedi da je $ab \leqslant -\dfrac{1}{n}$.

Drugo rješenje.

Budući da je zbroj kvadrata brojeva x_i jednak 1, ne mogu svi ti brojevi biti nula, a budući da im je zbroj jednak 0, ne mogu svi biti istog predznaka. Stoga je $a < 0$ i $b > 0$.

Za $i = 1, \ldots, n$, zapišimo $x_i = p_i a + q_i b$ za $p_i, q_i \geqslant 0$ takve da je $p_i + q_i = 1$.

Neka je

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Vrijedi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i a + q_i b = Pa + Qb.$$

Iz $\sum_{i=1}^{n} p_i + q_i = n$ slijedi $P + Q = n$. Dobili smo sustav od dvije nepoznanice P i Q čije jedinstveno rješenje glasi

$$P = \frac{nb}{b - a}, \qquad Q = \frac{na}{a - b}.$$

Zbrojimo li nejednakosti

$$x_i^2 = a^2 p_i^2 + 2ab p_i q_i + b^2 q_i^2 \leqslant a^2 p_i + b^2 q_i$$

za sve $i = 1, \ldots, n$, dobivamo

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2 P + b^2 Q = a^2 \cdot \frac{nb}{b - a} + b^2 \cdot \frac{na}{a - b} = -nab.$$

Iz toga slijedi $ab \leqslant -\dfrac{1}{n}$.

Zadatak 2.

Ante je zapisao niz $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ u kojem se svaki od brojeva $1, 2, \ldots, 2020$ pojavljuje točno jednom. Barbara želi saznati taj niz, a Ante joj daje informacije kroz niz *razmjena*.

U jednoj razmjeni Barbara na papir zapiše brojeve od 1 do 2020 te neke od njih spoji crtom i to tako da je svaki broj spojen s najviše jednim drugim i preda taj papir Anti. Ante zatim na drugi papir zapiše brojeve od 1 do 2020 te za svaki par brojeva i i j koje je Barbara spojila crtom, on spoji crtom brojeve a_i i a_j, te na kraju preda taj papir Barbari.

Koliko je najmanje razmjena potrebno da Barbara može sa sigurnošću odrediti Antin niz?

Rješenje.

Nakon jedne razmjene Barbara nikako ne može sa sigurnošću odrediti Antin niz. Naime, ako su na Antinom papiru spojeni brojevi a_i i a_j, Barbara nikako ne može znati koji od tih brojeva a_i, a koji je a_j.

Pokazat ćemo da Barbara uvijek može sa sigurnošću odrediti Antin niz nakon dvije razmjene, pa je najmanji potreban broj razmjena upravo 2.

Barbara u prvoj razmjeni spaja parove 3–4, 5–6, $\ldots$, 2019–2020.

U drugoj razmjeni Barbara spaja parove 2–3, 4–5, $\ldots$, 2018–2019.

Nakon tih razmjena Barbara zna brojeve a_1, a_2 i a_{2020}. Naime, broj a_1 je jedini koji nije bio spojen s nekim drugim brojem niti u prvoj niti u drugoj razmjeni. Broj a_2 je jedini broj koji je samo u drugoj razmjeni bio spojen s nekim drugim brojem, a broj a_{2020} je jedini broj koji je samo u prvoj razmjeni bio spojen s nekim drugim brojem.

Barbara sada zna i a_3 jer je taj broj nakon druge razmjene spojen s a_2. Nadalje, broj a_4 je u prvoj razmjeni bio spojen s a_3 pa Barbara zna i broj a_4. Nastavljajući tako zaključivati Barbara određuje sve ostale brojeve od a_1 do a_n, u $(n+1)$-vom koraku, određuje a_{n+1} jer je taj broj u točno jednoj razmjeni bio spojen s a_n, a ovisno o parnosti broja n zna i u kojoj.

Zadatak 3.

Dan je trokut ABC takav da je $|AB| < |AC|$. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, redom su dane točke P i Q takve da su pravci AQ i CP okomiti, a kružnica upisana trokutu ABC dira dužinu $\overline{PQ}$. Pravac CP siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama C i T.

Ako se pravci CA, PQ i BT sijeku u jednoj točki, dokaži da je kut $\sphericalangle CAB$ pravi.

Rješenje.

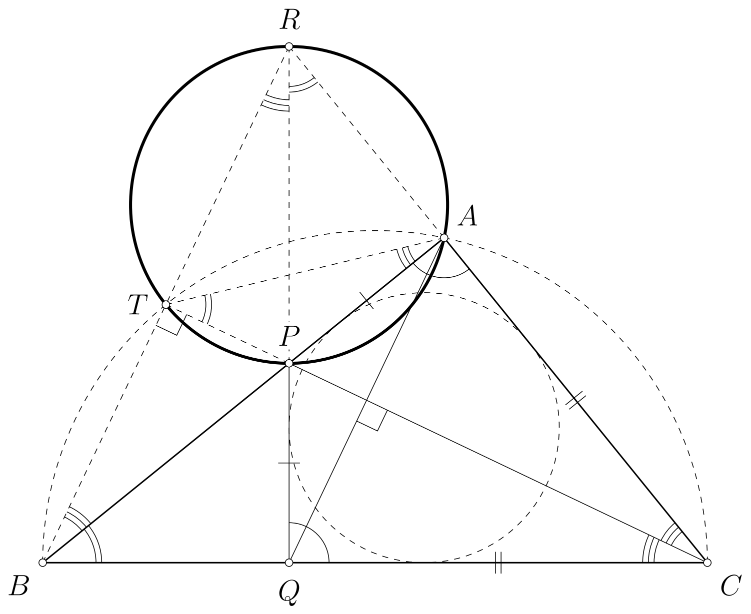
Četverokut $APQC$ je tangencijalan pa vrijedi $|AP| + |QC| = |CA| + |PQ|$.

Taj isti četverokut ima okomite dijagonale pa je $|AP|^2 + |QC|^2 = |CA|^2 + |PQ|^2$.

Znamo da je $|CA| > |AB| \geqslant |AP|$ pa je $|CA| - |AP| = |QC| - |PQ| > 0$. S druge strane je i

$$|CA|^2 - |AP|^2 = |QC|^2 - |PQ|^2,$$

iz čega slijedi da je $|CA| + |AP| = |QC| + |PQ|$. To povlači da je $|AP| = |PQ|$ i $|QC| = |CA|$, tj. četverokut $APQC$ je deltoid.



Označimo veličine kutova trokuta ABC s α, β i γ. Neka je R presjek pravaca CA, QP i BT. Vrijedi

$$\sphericalangle RQC = \sphericalangle PQC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC = \alpha,$$

pa zaključujemo da je

$$\sphericalangle QRC = \pi - \sphericalangle RQC - \sphericalangle QCA = \pi - \alpha - \gamma = \beta.$$

$ATBC$ je tetivni četverokut, pa je $\sphericalangle ATC = \sphericalangle ABC = \beta$, što znači da je četverokut $ARTP$ također tetivan. Sada je

$$\sphericalangle QRB = \sphericalangle PRT = \sphericalangle PAT = \sphericalangle BAT = \sphericalangle BCT = \frac{\gamma}{2},$$

a također je i

$$\sphericalangle RBA = \sphericalangle TBA = \sphericalangle TCA = \frac{\gamma}{2}.$$

Konačno, trokuti APQ i RBP su jednakokračni ($|AP| = |PQ|$ i $|RP| = |BP|$), iz čega zaključujemo da je $RB \parallel AQ$, odnosno da je $\sphericalangle CTB = 90°$.

To zapravo znači da je $\alpha = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CTB = 90°$.

Zadatak 4.

Za prirodni broj kažemo da je *neobičan* ako je zbroj recipročnih vrijednosti svih njegovih pozitivnih djelitelja različit od zbroja recipročnih vrijednosti svih pozitivnih djelitelja bilo kojeg drugog prirodnog broja.

(a) Dokaži da su svi prosti brojevi neobični.

(b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva koji nisu neobični.

Rješenje.

Označimo s $r(n)$ zbroj recipročnih vrijednosti, a sa $\sigma(n)$ zbroj svih pozitivnih djelitelja broja n. Očito vrijedi $r(n) > 1$ za $n > 1$. Za svaki djelitelj d broja n i broj $\frac{n}{d}$ je djeljitelj od n, pa vrijedi

$$r(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Ako su a i b relativno prosti brojevi, onda vrijedi $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Zaista, d je pozitivni djelitelj broja ab ako i samo ako se može prikazati u obliku $d = d'd''$ pri čemu je d' pozitivni djelitelj od a i d'' pozitivni djelitelj od b. Budući da su a i b relativno prosti, d' i d'' su jedinstveno određeni. Zato je

$$\sigma(ab) = \sum_{d|ab} d = \sum_{d'|a,\, d''|b} d'd'' = \left(\sum_{d'|a} d'\right) \cdot \left(\sum_{d''|a} d''\right) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Također zaključujemo da je

$$r(ab) = \frac{\sigma(ab)}{ab} = \frac{\sigma(a)\sigma(b)}{ab} = r(a)r(b).$$

(a) Neka je n prost broj i pretpostavimo da postoji $m \neq n$ takav da je $r(n) = r(m)$. Tada je

$$\frac{1}{n} = r(n) - 1 = r(m) - 1 = \frac{\sigma(m)}{m} - 1 = \frac{\sigma(m) - m}{m},$$

iz čega slijedi $m = n(\sigma(m) - m)$, tj. n dijeli m. Budući da je $m \neq n$, slijedi da je

$$r(m) \geqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = r(n) + \frac{1}{m} > r(n),$$

što je kontradikcija.

(b) Ako nađemo bilo koja dva različita prirodna broja m i n takva da je $r(m) = r(n)$, onda i za svaki k relativno prost s nm vrijedi $r(mk) = r(nk)$.
Jedan takav par su brojevi 6 i 28 jer je

$$r(6) = \frac{1+2+3+6}{6} = 2 = \frac{1+2+4+7+14+28}{28} = r(28).$$

Dakle, nisu neobični svi brojevi oblika $6p$, pri čemu je p prost broj strogo veći od 7. Takvih brojeva ima beskonačno mnogo.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi test

20. lipnja 2020.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

Rješenje.

Uvrstimo li $x = y = 0$, dobivamo $f(f(0)) = 0$. Također, za $x = y = 1$, dobivamo $f(f(1)) = 1$.

Uvrstimo li sada $x = 1$ i $y = 0$, dobivamo $f(1) = 0$. Iz toga zaključujemo $f(0) = f(f(1)) = 1$.

Uvrštavanjem $y = 0$, slijedi $f(f(x)) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Konačno, uvrštavanjem $x = 1$, dobivamo

$$f(1 + yf(1)) = f(f(y)) - 1 + f(y),$$

tj. $f(y) = 1 - y$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Direktnom provjerom vidimo da je $f(x) = 1 - x$ zaista rješenje jer je

$$1 - (x + y(1 - x)) = 1 - x - y + xy = 1 - x(1 - y) - x + 1 - (y + 1 - x).$$

Zadatak 2.

Dano je n cigli od kojih svaka ima masu barem 1. Ukupna masa svih n cigli je $2n$.

Dokaži da za svaki realni broj $r \in [0, 2n - 2]$ možemo odabrati neke od tih cigli čija je ukupna masa u intervalu $[r, r + 2]$.

Rješenje.

Cigle koje imaju težinu najviše 2 zovemo *male*.

Budući da je zbroj masa n cigli jednak $2n$, mora postojati barem jedna mala cigla.

Neka je S zbroj masa svih malih cigli. Dodavanjem jedne po jedne male cigle, vidimo da tvrdnja vrijedi za sve $r \in [0, S + 2]$.

Kako bismo pokazali tvrdnju za $r > S$, potrebno je koristiti i ostale cigle.

Neka su mase cigli redom $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Pokažimo da ne postoji k takav da je $a_1 + ... + a_k + 2 < a_{k+1}$.

Zaista, ako pretpostavimo suprotno, onda je $k + 2 < a_{k+1}$ i zbroj svih cigli je strogo veći od $k + (n - k)(k + 2) = 2n + (n - k - 1)k \geqslant 2n$, što je kontradikcija.

Dakle, ako je j takav da je a_{j+1} najlakša cigla koja nije mala, te uzmemo samo tu ciglu, vidimo da tvrdnja vrijedi za $r \in [a_{j+1}, a_{j+1} + 2]$, a dodavanjem malih cigli vidimo da tvrdnja vrijedi za sve $r \in [a_{j+1}, a_{j+1} + S + 2]$. Budući da je $S + 2 \geqslant a_{j+1}$, slijedi da tvrdnja vrijedi za $r \in [0, S+2] \cup [a_{j+1}, a_{j+1} + S + 2] = [0, a_{j+1} + S + 2]$.

Na isti način možemo nastaviti dodavati cigle jednu po jednu. U svakom koraku prvo promotrimo sljedeću po veličini ciglu a_{k+1}, a nakon toga njoj dodajemo ostale manje cigle u istom poretku kao u prethodnom koraku. Tako pokazujemo da tvrdnja vrijedi za

$$r \in [a_{k+1}, a_{k+1} + a_k + \ldots + a_1 + 2],$$

a zbog $a_1 + ... + a_k + 2 \geqslant a_{k+1}$ zaključujemo da tvrdnja vrijedi i za $r \in [0, a_{k+1} + a_k + \ldots + a_1 + 2]$.

Za $k = n$ dobivamo tvrdnju zadatka za sve $r \in [0, 2n]$.

Zadatak 3.

Dana je kružnica promjera $\overline{AB}$. Na toj kružnici, s različitih strana pravca AB, nalaze se točke C i D takve da vrijedi $|AC| < |BC|$ i $|AC| < |AD|$. Točka P pripada dužini $\overline{BC}$ te vrijedi $\sphericalangle CAP = \sphericalangle ABC$. Okomica iz točke C na pravac AB siječe pravac BD u točki Q. Pravci PQ i AD sijeku se u točki R, a pravci PQ i CD u točki T.

Ako je $|AR| = |RQ|$, dokaži da su pravci AT i PQ međusobno okomiti.

Rješenje.

Neka je k kružnica s promjerom $\overline{AB}$.

Za zadane točke A, B, C i P, točke D, Q i R takve da je $|AR| = |RQ|$ su jedinstvene. Zaista, neka je točka D' između D i B na kružnici k, te neka su Q' i R' pripadne točke definirane analogno točkama Q i R. Tada je $\sphericalangle AD'Q' = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADQ$, te je

$$\sphericalangle Q'AR' = \sphericalangle Q'AD' = \sphericalangle Q'AQ + \sphericalangle QAD + \sphericalangle DAD' > \sphericalangle QAD = \sphericalangle QAR.$$

Također je $\sphericalangle AQ'R' = \sphericalangle AQ'P < \sphericalangle AQP = \sphericalangle AQR$. Slijedi da je

$$\sphericalangle AQ'R' < \sphericalangle AQR = \sphericalangle QAR < \sphericalangle Q'AR',$$

pa je $|AR'| < |R'Q'|$. Analogno se pokazuje da ako je točka D' na k između točke D i osnosimetrične slike točke C obzirom na pravac AB, onda je $|AR'| > |R'Q'|$.

Budući da je $|AC| < |AD|$, slijedi da je točka Q izvan kružnice promjera $\overline{AB}$.

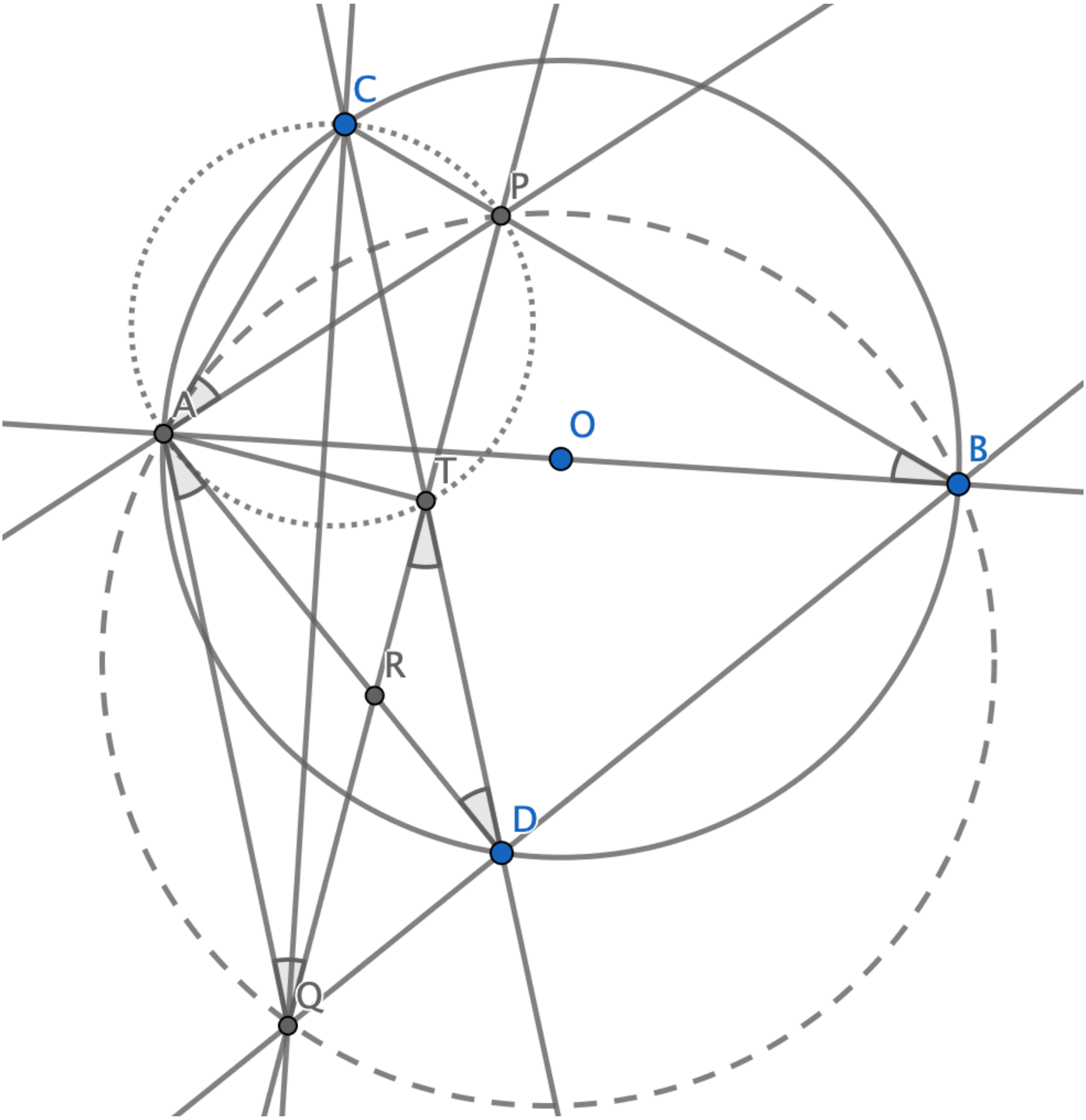
Neka je točka Q' na okomici kroz C na AB tako da je $APBQ'$ tetivan četverokut. Takve su dvije točke, te neka je Q' ona koja je izvan kružnice k. Neka je točka D' sjecište pravca BQ' i kružnice k različita od točke B. Nadalje, neka je T' sjecište pravaca PQ' i CD', a R' sjecište pravaca PQ' i AD'.

Neka je $\sphericalangle ABC = \beta$. Koristeći da su četverokuti $APBQ'$ i $ACBD'$ tetivni i da je $\overline{AB}$ promjer kružnice k, slijedi da je $\sphericalangle CD'B = \sphericalangle CAB = 90° - \beta$, $\sphericalangle PQ'B = \sphericalangle PAB = 90° - 2\beta$, $\sphericalangle AQ'P = \sphericalangle ABP = \beta$ i $\sphericalangle AQ'B = \beta + 90° - 2\beta = 90° - \beta$.

Budući da smo dokazali da je $\sphericalangle CD'B = \sphericalangle AQ'B$, slijedi da su pravci AQ' i CD' paralelni. Zaključujemo da je $\sphericalangle Q'AD' = \sphericalangle AD'C = \beta$.

Dakle, vrijedi $\sphericalangle Q'AR' = \sphericalangle AQ'R'$, tj. $|AR'| = |R'Q'|$.

Nadalje, trapez $AQ'D'T'$ je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle AT'Q' = \sphericalangle AD'Q' = 90°$.



Za točke D', Q', R' smo dokazali da imaju ista svojstva kojima su definirane točke D, Q, R, pa zbog dokazane jedinstvenosti zaključujemo da se te točke podudaraju, tj. $D \equiv D'$, $Q \equiv Q'$ i $R \equiv R'$. Iz toga slijedi $T' \equiv T$. Budući da smo pokazali da je $\sphericalangle AT'Q'$ pravi, slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 4.

Skup $A \subset \mathbb{N}$ zovemo *neprijateljskim* ako za svaki par (a, b) brojeva iz A postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $M(a, b) = 2^k$. Postoji li beskonačan skup $S \subset \mathbb{N}$ sa svojstvom da je skup svih mogućih zbrojeva dvaju različitih elemenata skupa S neprijateljski skup?

Prvo rješenje.

Pokazat ćemo da postoji beskonačan skup $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ takav da je

$$M(a_i + a_j, a_k + a_l) = 2$$

za sve $i < j, k < l, (i, j) \neq (k, l)$.

Neka je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = (2a_n)! + 1$ za $n \geqslant 1$.

Tvrnju dokazujemo matematičkom indukcijom po $n = i + j + k + l$.

Baza: $M(a_1 + a_2, a_1 + a_3) = M(4, 6! + 2) = 2$.

Korak: Neka su dani $i < j, k < l, (i, j) \neq (k, l)$, te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve četvorke kojima je zbroj manji od $i + j + k + l$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $l \geqslant j$.

Prvi slučaj: $l > j$.

Tada je

$$a_i + a_j \leqslant 2a_l - 1,$$

pa $a_i + a_j$ dijeli $(2a_l - 1)!$, te je

$$M(a_i+a_j, a_k+a_l) = M(a_i+a_j, a_k+(2a_l-1)!+1) = M(a_i+a_j, a_k+1) = M(a_i+a_j, a_k+a_1) = 2$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti primijenili pretpostavku indukcije.

Drugi slučaj: $l = j$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $k > i$. Tada je

$$M(a_i + a_j, a_k + a_l) = M(a_i + a_j, a_k + a_l - (a_i + a_j)) = M(a_i + a_j, a_k - a_i).$$

Budući da je $a_k - a_i < a_k \leqslant a_j - 1$, zaključujemo da $a_k - a_i$ dijeli $(2a_j - 1)!$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} M(a_i + a_j, a_k - a_i) &= M(a_i + (2a_j - 1)! + 1, a_k - a_i) = M(a_i + 1, a_k - a_i) \\ &= M(a_i + 1, a_k + 1) = M(a_i + a_1, a_k + a_1) = 2 \end{aligned}$$

prema pretpostavci indukcije.

Drugo rješenje.

Dokažimo da takav skup S postoji. Bit će dan kao skup $S = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Neka je $A := \{x + y : x, y \in S, x \neq y\}$. Također, uvedimo pokrate $S_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A_n := \{x + y : x, y \in S_n, x \neq y\}$ za prirodan n.

Uočimo da ako za neki neparan prost broj p postoje dva elementa $x, y \in S$ takva da $x \equiv y \not\equiv 0 \pmod{p}$, tada ne smije postojati neki element $z \in S$ sa svojstvom $z \equiv -x \pmod{p}$. No, također, to znači da može postojati proizvoljno mnogo elemenata $t \in S$ takvih da $t \equiv x \pmod{p}$ (ovdje koristimo i činjenicu da je p neparan, pa zato $p \nmid 2o$, gdje je $o \neq 0$ ostatak pri dijeljenju tih proizvoljno mnogo brojeva s p).

Uvedimo još oznaku $\mathcal{P}_n := \{p \text{ neparan prost } : p < 2a_n\}$.

Dokažimo tvrdnju indukcijom. Tvrdnja koju dokazujemo je sljedeća: postoji skup S takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ vrijedi da je A_n neprijateljski te dodatno za svaki $p \in \mathcal{P}_n$ postoji $x_p \in S_n$ sa svojstvima

$$p \nmid x_p \text{ i ne postoji } x \in S_n \text{ takav da } x \equiv -x_p \pmod{p}.$$

Za bazu indukcije lako se uvjerimo da skup $S_2 := \{1, 3\}$ zadovoljava uvjete zadatka.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Novi element skupa a_{n+1} definiramo preko Kineskog teorema o ostatcima. Iz egzistencije elemenata x_p iz pretpostavke indukcije za n, novi element definiramo kao bilo koje prirodno rješenje sustava kongruencija

$$a_{n+1} \equiv x_p \pmod{p}, \; p \in \mathcal{P}_n$$

veće od a_n.

Dokažimo da je skup A_{n+1} neprijateljski. Kako znamo da je A_n neprijateljski iz pretpostavke indukcije, preostalo je provjeriti parove zbrojeva koji uključuju a_{n+1}. Pretpostavimo prvo da postoji neparan prosti djelitelj p zajednički brojevima $a_{n+1} + a_i$ i $a_j + a_k$, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Kako $p | a_j + a_k$, slijedi da je $p \in \mathcal{P}_n$, pa stoga $a_{n+1} \equiv x_p \pmod{p}$, pa mora biti $a_i \equiv -x_p \pmod{p}$, što je kontradikcija s definicijom elementa x_p.

Pretpostavimo sada da postoji neparan prosti djelitelj zajednički brojevima $a_{n+1} + a_i$ i $a_{n+1} + a_j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Kako p dijeli svakog od njih, dijeli i njihovu razliku $a_i - a_j$ koja je po apsolutnoj vrijednosti sigurno manja od $2a_n$. Zato $p \in \mathcal{P}_n$, pa slijedi da je $a_{n+1} \equiv x_p \pmod{p}$. Slično kao ranije zaključujemo da mora biti $a_i \equiv a_j \equiv -x_p \pmod{p}$, što je kontradikcija s definicijom elementa x_p.

Za kraj dokaza koraka indukcije, provjerimo je li zadovoljeno dodatno svojstvo. Uzmimo proizvoljan neparan prost $p \in \mathcal{P}_{n+1} \setminus P_n \subset \langle 2a_n, 2a_{n+1} \rangle$. Kako je $n \geqslant 2$, znamo da je $a_i \in S_n$ za $i = 1, 2$. Također, za iste indekse i znamo da $1 \leqslant a_i \leqslant a_n < \frac{p}{2}$, što znači da sigurno daju ostatak različit od nule modulo p. Dapače, jedini ostatak koji s njima zbrojen može dati rezultat djeljiv s p je a_{n+1} (zbog $a_j \leqslant a_n < \frac{p}{2}$). No, kako a_1 i a_2 daju različite ostatke modulo p, jedan od njih može biti uzet kao x_p.

Ovime je tvrdnja indukcije dokazana, a zato je i gotov dokaz da skup S zadovoljava sve uvjete zadatka.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

11. srpnja 2020.

Zadatak 1.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj i neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ strogo rastući niz realnih brojeva takav da je $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2$. Neka je M neki podskup skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ za koji je vrijednost izraza $\left|1 - \sum_{k\in M} a_k\right|$ najmanja moguća.

Dokaži da postoji strogo rastući niz realnih brojeva $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ takav da je $\sum_{k=1}^{n} b_k = 2$, za koji vrijedi $\sum_{k\in M} b_k = 1$.

Rješenje.

Primijetimo da je

$$\sum_{k\in A} a_k - 1 = 1 - \sum_{k\in A^c} a_k$$

pri čemu je A^c komplement skupa A u $\{1, 2, \ldots, n\}$. Stoga M minimizira navedeni izraz ako i samo ako ga M^c minimizira.

Ako je $\sum_{k\in M} a_k = 1$ možemo odabrati $b_k = a_k$ za sve $k \in M$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\epsilon := 1 - \sum_{k\in M} a_i > 0,$$

jer u suprotnom promotrimo M^c umjesto M.

Tvrdimo da za svaki $k \in M$ broju a_k možemo oduzet $\frac{\epsilon}{|M|}$, a za svaki $k \in M^c$ broju a_k dodati $\frac{\epsilon}{|M^c|}$ bez da promijenimo poredak brojeva, tj. narušimo monotonost niza. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $k \in M^c$ takav da je $k+1 \in M$ i da je $a_{k+1} - a_k < \frac{\epsilon}{|M|} + \frac{\epsilon}{|M^c|}$. Tada vrijedi

$$1 + \epsilon > a_k + \sum_{j\in M\setminus\{k+1\}} a_j > 1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{|M|} + \frac{\epsilon}{|M^c|} > 1 - \epsilon,$$

gdje prva nejednakost vrijedi jer je $a_k < a_{k+1}$, a druga zbog pretpostavke. No, to je kontradikcija sa pretpostavkom da M minimizira udaljenost od 1 jer smo našli $M' = \{k\} \cup M \setminus \{k+1\}$ sa manjom udaljenošću od 1. Dakle, definiramo li

$$b_k = \begin{cases} a_k - \frac{\epsilon}{|M|} & k \in M \\ a_k + \frac{\epsilon}{|M^c|} & k \in M^c \end{cases}$$

vrijedi da je niz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rastući i da je

$$\sum_{k\in M} b_k = \sum_{k\in M} \left(a_k - \frac{\epsilon}{|M|}\right) = 1.$$

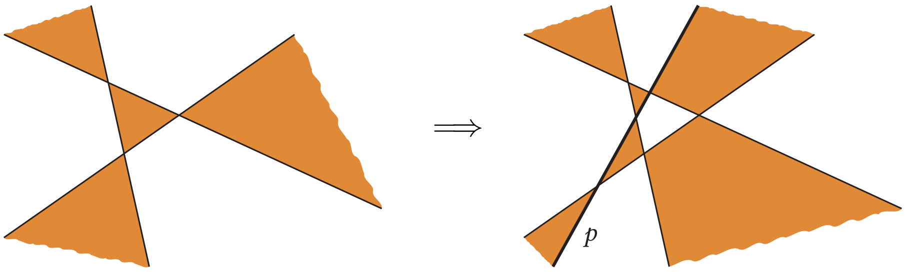
Zadatak 2.

Splet je konačan skup pravaca u općem položaju (tj. svaka dva pravca se sijeku, ali nikoja tri ne prolaze istom točkom). Pravci spleta dijele ravninu na *područja* čije su stranice dužine ili polupravci. *Labirint* je splet u kojem je svaki pravac obojan, poput zida, s jedne strane crvenom, a s druge strane plavom bojom. Dva područja sa zajedničkim vrhom koja u toj točki imaju i crvene i plave stranice nazivamo *povezanima*. Po labirintu se kreću mravi koji mogu prijeći iz područja u kojem se nalaze samo u područje koje je s njim povezano. Za splet S definiramo $k(S)$ kao najveći broj mrava koje je moguće razmjestiti po svakom labirintu na S tako da se nikoja dva mrava ne mogu sastati krećući se po labirintu.

Za $n \in \mathbb{N}$, odredi sve moguće vrijednosti $k(S)$ pri čemu je S splet od n pravaca.

Rješenje.

Indukcijom pokazujemo činjenicu da n pravaca u općem položaju u ravnini dijelu tu ravninu na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ područja. Tvrdnja je očita za $n = 0$. Prilikom dodavanja n-tog pravca svaki od postojećih $n-1$ pravaca siječemo točno jednom i time povećamo broj područja za n. Iskoristimo li pretpostavku indukcije vidimo da n pravaca generira $\frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ područja.



Primijetimo da sjecišta imamo točno $\binom{n}{2}$. Svako sjecište smanjuje broj mrava koji se ne mogu sastati za najviše jedan, pa kako god pravci bili obojani, uvijek možemo razmjestiti barem $\binom{n+1}{2} + 1 - \binom{n}{2} = n + 1$ mrava.

Kako bismo pokazali da je za svaki splet odgovor upravo $n+1$, konstruirat ćemo labirint u kojem se ne može razmjestiti više od $n+1$ mrava. Za proizvoljni splet, uvedimo koordinatni sustav u ravnini takav da nikoji pravac nije paralelan x- ili y-osi. Tada svaki pravac određuje lijevu i desnu poluravninu, pri čemu je desna poluravnina ona u kojoj se nalazi dio x-osi za vrlo velike pozitivne vrijednosti. Lijevu stranu svakog pravca obojimo crveno, a desnu plavo.

Svakom području pridružimo broj pravaca koji se nalaze lijevo od tog područja. Tvrdimo da su područja kojima je pridružen isti broj međusobno povezana.

Promotrimo bilo koje područje A kojem je pridružen broj $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ako to područje nije neograničeno prema prema pozitivnom dijelu$y$-osi, onda postoji njegov vrh s najvećom ordinatom. Taj vrh je ujedno i vrh još jednog područja s istim pridruženim brojem. Naime, pravac koji je bio lijevo od donjeg područja prestaje biti desno od gornjeg područja, a onaj koji je bio desno od donjeg područja sada postaje lijevo od gornjeg. Svi ostali pravci su u istom položaju u odnosu na ova dva područja. Dakle, iz svakog područja s oznakom k možemo doći do područja s oznakom k koje nije ograničeno prema gore. Takvih područja ima točno $n+1$ jer iznad svih sjecišta možemo povući pravac paralelan s y-osi koji siječe svaki od danih pravaca točno jednom.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut i neka su D, E i F nožišta njegovih visina iz vrhova A, B i C, redom. Neka su k_B i k_C kružnice upisane trokutima BDF i CDE, redom. Kružnica k_B dodiruje dužinu $\overline{DF}$ u točki M, a kružnica k_C dužinu $\overline{DE}$ u točki N. Pravac MN siječe kružnicu k_B u točkama M i P, a kružnicu k_C u točkama N i Q.

Dokaži da je $|MP| = |NQ|$.

Rješenje.

Budući da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AFC = 90°$, slijedi da je $AFDC$ tetivan četverokut, te je $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BFD = \sphericalangle BCA$. Analogno, vrijedi da je $\sphericalangle CED = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BAC$. Zaključujemo da su trokuti ABC, DBF i DEC slični.

Označimo sa r_B i r_C polumjere, a sa I_B i I_C središta kružnica k_B i k_C, redom.

Budući da su $\overline{DM}$ i $\overline{DN}$ odsječci tangenti na upisanu kružnicu iz vrha s istim kutem sličnih trokuta DBF i DEC slijedi da je $|DM| : |DN| = r_B : r_C$.

Neka je $x = \sphericalangle DMN$ i $y = \sphericalangle DNM$. Prema poučku o sinusima za trokut DMN slijedi da je $|DM| : |DN| = \sin y : \sin x$.

Budući da je polumjer $\overline{I_B M}$ okomit na tangentu DM, slijedi da je

$$\sphericalangle S_B MP = 180° - 90° - \sphericalangle DMN = 90° - x,$$

pa u jednakokračnom trokutu MPS_B vrijedi $\sphericalangle MS_B P = 2x$. Slijedi da je $|MP| = 2r_B \sin x$. Analogno pokazujemo $|NQ| = 2r_C \sin y$.

Dakle, vrijedi

$$\frac{|MP|}{|NQ|} = \frac{2r_B \sin x}{2r_C \sin y} = \frac{|DM|}{|DN|} \cdot \frac{|DN|}{|DM|} = 1,$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 4.

Dan je prirodni broj C. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom:

za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $a + b > C$, vrijedi $a + f(b) \mid a^2 + bf(a)$.

Rješenje.

Možemo direktno provjeriti da svaka funkcija $f(a) = ak$ za $k \in \mathbb{N}$ zadovoljava uvjet.

Prvo pokazujemo da b dijeli $f(b)^2$ za svaki $b \in \mathbb{N}$. Neka je $b \in \mathbb{N}$ i neka je n dovoljno veliki prirodni broj takav da vrijedi $nb - f(b) \geqslant C$. Stavimo li $a = nb - f(b)$ u uvjet zadatka dobivamo

$$nb \mid (nb - f(b))^2 + bf(nb - f(b)),$$

pa $b \mid f(b)^2$, kao što i tvrdimo.

Slijedi da $p \mid f(p)$ za svaki prost broj p. Ako zapišemo $f(p) = k(p) \cdot p$, onda nejednakost $f(p) \leqslant f(1) \cdot p$ (koja vrijedi za dovoljno velik p) povlači da se neka vrijednost k mora poprimiti kao$k(p)$ za beskonačno mnogo prostih brojeva p. Dokazat ćemo da je $f(a) = ka$ za sve $a \in \mathbb{N}$.

Stavimo $b = p$ u uvjet zadatka, pri čemu je p dovoljno velik prost broj i vrijedi $k(p) = k$. Slijedi

$$a + kp \mid (a^2 + pf(a)) - a(a + kp) = pf(a) - pka.$$

Za dovoljno veliki prost broj p vrijedi $M(a+kp, p) = 1$, pa zato vrijedi

$$a + kp \mid f(a) - ka.$$

No, to je moguće za proizvoljno veliki prost broj p ako i samo ako je $f(a) - ka = 0$. Time je dokaz završen.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

11. srpnja 2020.

Zadatak 1.

Odredi sve periodične nizove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva sa svojstvom da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

Rješenje.

Dani uvjet možemo zapisati na sljedeći način

$$2x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n + 1,$$

odnosno kao

$$2(x_{n+2}x_{n+1} - 1) = x_{n+1}x_n - 1.$$

Uvedemo li oznaku $y_n = x_{n+1}x_n - 1$, zaključujemo da je $2y_{n+1} = y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je $A = y_1 = x_1x_2 - 1$, onda je

$$y_n = \frac{1}{2^{n-1}}A.$$

Neka je p takav da je $x_{n+p} = x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$y_{n+p} = x_{n+p+1}x_{n+p} - 1 = x_{n+1}x_n - 1 = y_n,$$

pa zaključujemo da je niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ također periodičan.

No, zbog oblika $y_n = \frac{1}{2^{n-1}}A$, taj niz može biti periodičan samo ako je $A = 0$.

Dakle, vrijedi $x_{n+1}x_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Svaki takav niz je rješenje (što je očito iz načina na koji smo zapisali uvjet i ekvivalencije tog zapisa sa uvjetom u zadatku), tj. rješenja su svi nizovi oblika

$$x_{2k-1} = a, \quad x_{2k} = \frac{1}{a}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je a proizvoljan pozitivan realni broj.

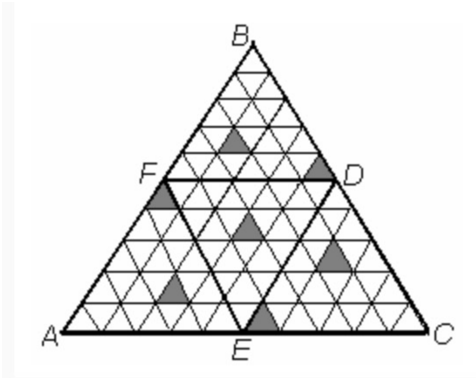
Zadatak 2.

Dan je jednakostraničan trokut na čijoj je svakoj stranici označeno po 9 točaka koje dijele tu stranicu na 10 sukladnih dijelova. Te su točke spojene s ukupno 27 dužina paralelnih stranicama trokuta. Na taj način trokut je podijeljen na 100 malih jednakostraničnih trokuta. Područje između dvije susjedne paralelne dužine nazivamo *prugom*.

Koliko najviše malih trokuta možemo odabrati tako da unutar nijedne pruge ne budu dva odabrana trokuta?

Rješenje.

Neka je ABC početni trokut i neka su D, E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada su trokuti AEF, DBF, DEC i DEF sukladni. Označimo sa a, b, c, d redom broj odabranih malih trokuta koji se u njima nalaze.



Uočimo da se trapez $ABDE$ sastoji od pet vodoravnih pruga, pa u njemu može biti najviše pet odabranih malih trokuta, tj. vrijedi

$$a + b + d \leqslant 5.$$

Analogno slijedi

$$a + c + d \leqslant 5, \qquad b + c + d \leqslant 5.$$

Zbrajanje tih triju nejednakosti dobivamo

$$2(a + b + c + d) + d \leqslant 15,$$

iz čega, zbog $d \geqslant 0$, zaključujemo da je $a + b + c + d \leqslant 7.5$, odnosno $a + b + c + d \leqslant 7$.

Sljedeći primjer pokazuje da je moguće odabrati točno 7 malih trokuta tako da unutar nijedne pruge ne budu dva. Dakle, odgovor je 7.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut. Kružnica k prolazi točkom A, siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama D i E (različitim od A), a stranicu $\overline{BC}$ u točkama F i G i pritom je F između B i G. Tangenta opisane kružnice trokuta BDF u točki F i tangenta opisane kružnice trokuta CEG u točki G sijeku se u točki T, različitoj od A.

Dokaži da su pravci AT i BC međusobno paralelni.

Rješenje.

Označimo kružnicu na kojoj leže točke A, D, E,F, G sa k.

Neka je T' kao presjek tangente kroz F i kružnice k.

Zbog kuta tetive i tangente i tetivnosti četverokuta $AT'DF$ vrijedi da je

$$\sphericalangle T'AD = \sphericalangle T'FD = \sphericalangle DBF,$$

pa su pravci AT' i BC paralelni.

Zbog tetivnosti četverokuta $AT'GE$ je

$$\sphericalangle T'GE = 180^\circ - \sphericalangle T'AB - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = kutGCE,$$

pa po obratu poučka o kutu tetive i tangente slijedi da je pravac $T'G$ tangenta opisane kružnice trokuta CEG. Dakle, $T' = T$, te slijedi traženi zaključak.

Zadatak 4.

Funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ je *pseudopolinom* ako za svaka dva različita broja $a, b \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$a - b \mid f(a) - f(b).$$

Odredi sve pseudopolinome takve da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f(n) \leqslant n\sqrt{n}$.

Rješenje.

Za $n = 0$ iz uvjeta slijedi $f(0) \leqslant 0$, pa kako je $f(n) \geqslant 0$, zaključujemo $f(0) = 0$.

Uvrstimo li $a = n$ i $b = 0$, slijedi $n \mid f(n)$.

Također, imamo $f(1) \leqslant 1$ što vodi na dvije mogućnosti.

Prvi slučaj: $f(1) = 0$. Uzmimo proizvoljan $n > 2$. Budući da vrijedi $n-1 \mid f(n) - f(1) = f(n)$ i $n \mid f(n)$, te da su n i $n-1$ relativno prosti, slijedi $n(n-1)|f(n)$. Zbog $f(n) \leqslant n\sqrt{n}$, ovo je moguće jedino ako $f(n) = 0$. Prema tome, vrijedi $f(n) = 0$ za sve $n \neq 2$. Budući da za sve proste brojeve $p > 2$ vrijedi da $p = (p+2) - 2$ dijeli $f(p+2) - f(2) = -f(2)$, slijedi da je $f(2) = 0$. Funkcija $f \equiv 0$ je zaista rješenje.

Drugi slučaj: $f(1) = 1$. Neka je $n \neq 2$. Znamo da je $f(n) = an$ za neki cijeli broj $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{n}$. Uvjet $n-1 \mid f(n) - 1$, tj. $n-1 \mid an - 1$, povlači $n-1 \mid (an-1) - (n-1) = a - 1$, što je zbog ograde na a moguće jedino ako $a = 1$. Prema tome, $f(n) = an = n$. Opet za proizvoljni prost broj $p > 2$ imamo $p \mid f(p+2) - f(2) = p + 2 - f(2)$, tj. $p \mid 2 - f(2)$, pa je $f(2) = 2$. Funkcija $f(n) = n$ je zaista rješenje.