IZBORNO NATJECANJE 2010. – prvi dio

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$?

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da postoji tražena funkcija. Iz zadanog uvjeta imamo:

$$f(n+1) - f(n) = f(f(n)) \geqslant 1,$$

iz čega zaključujemo da je funkcija strogo rastuća. Zbog toga je $f(n) \geqslant n$ za svaki prirodni broj n. Sada imamo:

$$f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \geqslant n + f(n) \geqslant 2n,$$

iz čega slijedi

$$f(n) \geqslant 2(n-1) = 2n - 2.$$

S druge strane,

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n) < f(n+1),$$

a budući da je funkcija f rastuća iz toga slijedi:

$$f(n) < n + 1.$$

Dakle,

$$2n - 2 \leqslant f(n) < n + 1,$$

a to očito nije moguće za proizvoljni prirodni broj n pa zaključujemo da ne postoji funkcija s traženim svojstvima.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je funkcija strogo rastuća.

Označimo $a = f(1)$. Uvrštavanjem $n = 1$ u dani uvjet dobivamo da je $f(a) = f(2) - a$ iz čega slijedi da je $f(a) < f(2)$. Zato je $a < 2$ (budući da je funkcija f rastuća). Zaključujemo da je $a = 1$, tj. $f(1) = 1$. Tada je $f(2) = a + f(a) = 2$.

Uvrštavanjem $n = 2$ u uvjet zadatka dobivamo

$$f(f(2)) = f(3) - f(2),$$

odnosno

$$f(3) = 4.$$

Naposljetku, uvrstimo $n = 3$ u uvjet zadatka:

$$\begin{aligned} f(f(3)) &= f(4) - f(3), \\ f(4) &= f(4) - 4, \\ 0 &= -4. \end{aligned}$$

Zaključujemo da ne postoji funkcija s traženim svojstvima.

Zadatak 2.

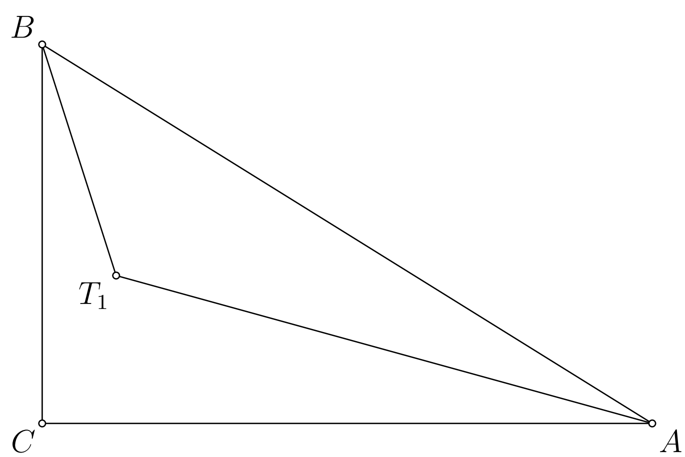
Dan je pravokutni trokut i konačan skup točaka u njemu. Dokaži da se ove točke mogu povezati izlomljenom linijom (ne nužno zatvorenom) tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

Rješenje.

Koristit ćemo činjenice da je $|XY|^2 \leqslant |XZ|^2 + |YZ|^2$ ako je $\sphericalangle XZY \leqslant 90°$ i $|XY|^2 \geqslant |XZ|^2 + |YZ|^2$ ako je $\sphericalangle XZY \geqslant 90°$.

Indukcijom po broju točaka n ćemo dokazati nešto jaču tvrdnju: Postoji izlomljena linija čiji su početak i kraj rubne točke hipotenuze i koja spaja danih n točaka tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

Neka je dani trokut ABC s pravim kutom u vrhu C.
Za $n = 1$, neka se unutar trokuta nalazi točka T_1.



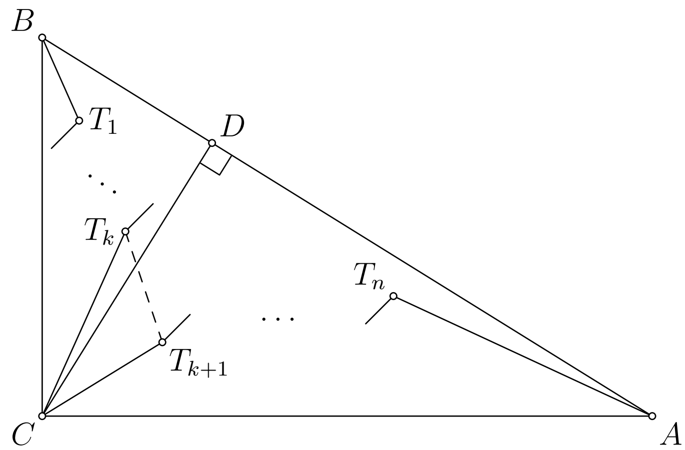
Tada je $|AT_1|^2 + |BT_1|^2 \leqslant |AB|^2$ jer je $\sphericalangle AT_1B \geqslant 90°$. Time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi ako je broj točaka manji od n. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n točaka. Visinom $\overline{CD}$ podijelimo trokut ABC na dva manja trokuta koja su mu slična.

Ukoliko danih točaka ima u oba manja trokuta prema pretpostavci indukcije u svakom od njih tada postoji izlomljena linija koja zadovoljava uvjete zadatka. (Ukoliko se neke točke nalaze na samoj visini smatramo da svaka od njih pripada trokutu BCD, ali ne i trokutu CAD.) Označimo točke u trokutu BCD s $T_1, T_2, \ldots, T_k$ tako da je $BT_1T_2 \ldots T_kC$ linija iz pretpostavke indukcije. Na analogni način označimo točke $T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots, T_n$ u trokutu CAD.

Prema pretpostavci indukcije je

$$\begin{aligned}|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 \geqslant &\left(|BT_1|^2 + |T_1T_2|^2 + \cdots + |T_{k-1}T_k|^2 + |T_kC|^2\right) \\ &+ \left(|CT_{k+1}|^2 + |T_{k+1}T_{k+2}|^2 + \cdots + |T_{n-1}T_n|^2 + |T_nA|^2\right).\end{aligned}$$

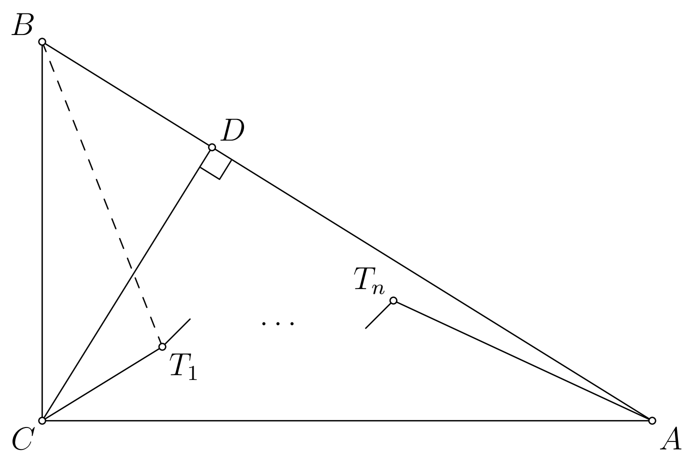


Nadalje, $\sphericalangle T_kCT_{k+1} \leqslant 90^\circ$ pa je $|T_kC|^2 + |CT_{k+1}|^2 \geqslant |T_kT_{k+1}|^2$. Odavde dobivamo:

$$|AB|^2 \geqslant |BT_1|^2 + |T_1T_2|^2 + \cdots + |T_{n-1}T_n|^2 + |T_nA|^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Ostaje nam dokazati da tvrdnja vrijedi i u slučaju da jedan od dva manja trokuta ne sadrži nijednu od danih točaka. Pretpostavimo da je to trokut BCD.



U tom slučaju spustimo visinu iz vrha D u trokutu CAD. Ukoliko se ni u tom trokutu točke ne nalaze s obje strane visine, postupak nastavljamo dok ne dobijemo trokut u kojem to vrijedi. (Taj postupak će očito završiti nakon konačnog broja koraka.)

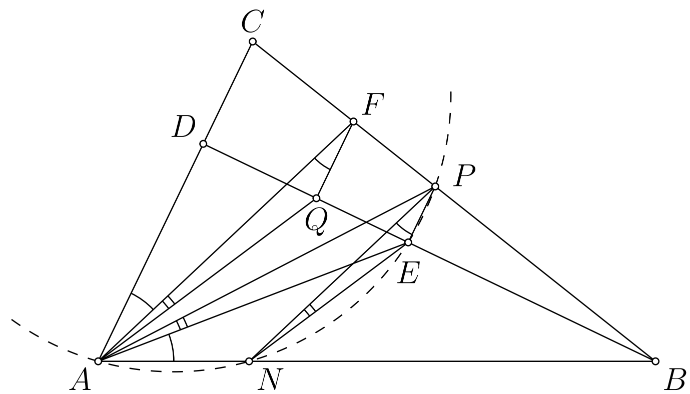
Sada na trokut CAD (ili na dobiveni manji trokut) primijenimo prije opisani algoritam i dobijemo izlomljenu liniju $CT_1T_2 \ldots T_nA$ kojoj je suma kvadrata duljina segmenata najviše $|AC|^2$. Međutim, $|BT_1|^2 - |CT_1|^2 \leqslant |BC|^2$ pa vidimo da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije $BT_1T_2 \ldots T_nA$ najviše $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

Time smo dokazali korak indukcije pa tvrdnja vrijedi neovisno o broju točaka.

Zadatak 3.

Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC. Neka su E i F točke na dužinama $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ redom, takve da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$ redom, takve da je $EP \parallel CD$ i $FQ \parallel CD$. Dokaži da je $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$.

Prvo rješenje.



Neka je točka N na stranici $\overline{AB}$ takva da je NE paralelno s AQ. Tada su trokuti NEP i AQF slični (svi odgovarajući kutovi su im sukladni i vrijedi $PE \parallel FQ$).

Tada je

$$\begin{aligned} \sphericalangle EPN &= \sphericalangle QFA && \text{(spomenuta sličnost)} \\ &= \sphericalangle FAC && \text{(kutovi s paralelnim kracima)} \\ &= \sphericalangle EAN && \text{(pretpostavka zadatka)} \end{aligned}$$

pa je $APEN$ tetivni četverokut.

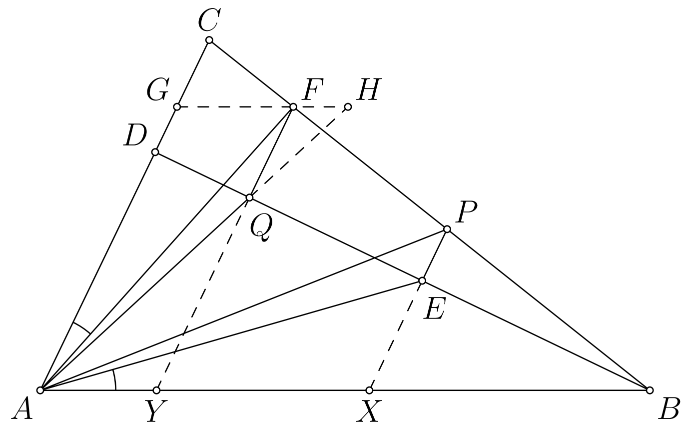
Sada je $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PNE = \sphericalangle FAQ$.

Konačno,

$$\sphericalangle CAQ = \sphericalangle CAF + \sphericalangle FAQ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAP = \sphericalangle BAP$$

i tvrdnja je dokazana.

Drugo rješenje.



Neka pravci PE i FQ sijeku AB u točkama X i Y redom.

Budući je $PX \parallel FY$, a pravci FP, QE i YX prolaze istom točkom B, iz Talesovog teorema imamo

$$\frac{|XE|}{|XP|} = \frac{|YQ|}{|YF|}. \tag{1}$$

Neka pravac kroz F paralelan s AB siječe AC i AQ u G i H redom.

Kako je $AY \parallel FH$ i $QF \parallel AG$, vrijedi

$$\frac{|YQ|}{|YF|} = \frac{|AQ|}{|AH|} = \frac{|GF|}{|GH|}. \tag{2}$$

Iz (**??**) i (**??**) slijedi

$$\frac{|XE|}{|XP|} = \frac{|GF|}{|GH|}. \tag{3}$$

Budući da je $XE \parallel AG$ i $AX \parallel GF$, vrijedi

$$\sphericalangle AXP = \sphericalangle AGF. \tag{4}$$

S obzirom da je $\sphericalangle XAE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF = \sphericalangle GAF$, iz (**??**) dobivamo da su trokuti $\triangle AXE$ i $\triangle AGF$ slični. Iz toga i (**??**) slijedi da su trokuti $\triangle AXP$ i $\triangle AGH$ slični. Tako dobivamo $\sphericalangle XAP = \sphericalangle GAH$, a to povlači $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$.

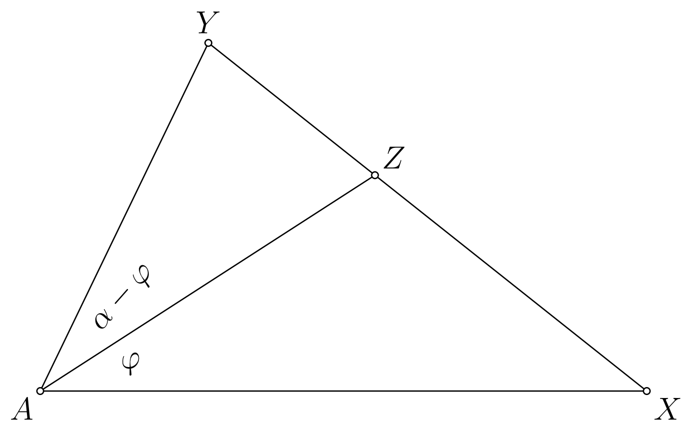
Treće rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću lemu.

Lema. U trokutu AXY na stranici $\overline{XY}$ odabrana je točka Z i označeni su kutovi $\sphericalangle XAZ = \varphi$, $\sphericalangle XAY = \alpha$. Tada je

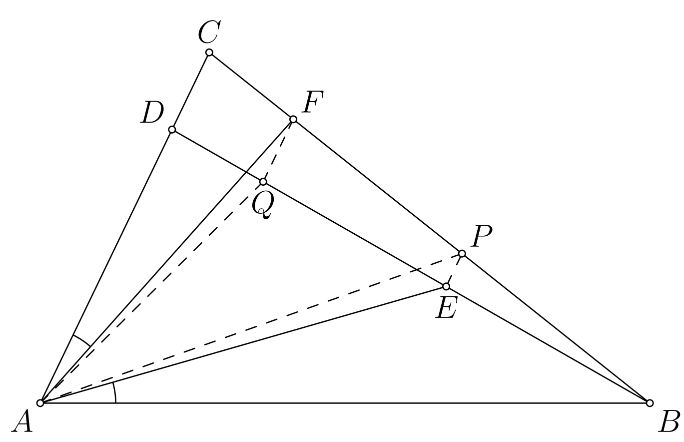
$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{|XZ|}{|YZ|}\cdot\frac{|AY|}{|AX|}.$$

Dokaz leme.



Primjenimo poučak o sinusima na trokute AXZ i AYZ, iskoristimo činjenicu da je $\sin\sphericalangle AZY = \sin\sphericalangle AZX$ jer je $\sphericalangle AZY + \sphericalangle AZX = 180°$ te dobivamo

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{|XZ|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle AZX}{|AX|}}{|YZ|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle AZY}{|AY|}} = \frac{|XZ|}{|YZ|}\cdot\frac{|AY|}{|AX|}.$$



Iz Talesovog teorema o proporcionalnosti, zbog $EP \parallel FQ \parallel CD$ slijedi

$$\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{|BP|}{|CP|} \quad \text{i} \quad \frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|DQ|}{|BQ|}.$$

Sada primjenom prije dokazane leme na sljedeće izbore trokuta i točaka, redom:

$$\triangle ABC,\ P;\quad \triangle ABD,\ E;\quad \triangle ACB,\ F;\quad \triangle ADB,\ Q,$$

te koristeći uvjet zadatka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \sphericalangle BAP}{\sin(\alpha - \sphericalangle BAP)} &= \frac{|BP|}{|CP|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|DE|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \\
&= \frac{|BE|}{|DE|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sin \sphericalangle BAE}{\sin(\alpha - \sphericalangle BAE)} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} \\
&= \frac{\sin \sphericalangle CAF}{\sin(\alpha - \sphericalangle CAF)} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} \\
&= \frac{|CF|}{|BF|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|BF|} \cdot \frac{|AB|}{|AD|} \\
&= \frac{|DQ|}{|BQ|} \cdot \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin \sphericalangle DAQ}{\sin(\alpha - \sphericalangle DAQ)}.
\end{aligned}$$

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$, $x_1 = \sphericalangle BAP$ i $x_2 = \sphericalangle DAQ$. Očito je $x_1 \neq \alpha$, $x_2 \neq \alpha$. Tada vrijedi:

$$\frac{\sin x_1}{\sin(\alpha - x_1)} = \frac{\sin x_2}{\sin(\alpha - x_2)},$$

$$\sin x_1(\sin \alpha \cos x_2 - \cos \alpha \sin x_2) = \sin x_2(\sin \alpha \cos x_1 - \cos \alpha \sin x_1),$$

$$\sin \alpha(\sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1) = 0,$$

$$\sin \alpha \sin(x_1 - x_2) = 0.$$

Budući su α, x_1, x_2 kutovi u trokutu, jedina mogućnost je $x_1 = x_2$, što znači da mora biti $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Za dani prirodni broj n neka je a najveći prirodni broj za koji je broj $5^n - 3^n$ djeljiv s 2^a, te neka je b najveći prirodni broj takav da je $2^b \leqslant n$. Dokaži da je $a \leqslant b + 3$.

Rješenje.

Za dani prirodni broj n, označimo s $f(n)$ najveći prirodni broj takav da je broj $5^n - 3^n$ djeljiv s $2^{f(n)}$. Treba dokazati da je $f(n) \leqslant b + 3$.

Dokažimo prvo da je $f(2^n) = n + 3$. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ najveća potencija broja 2 koja dijeli broj $5^{2^1} - 3^{2^1} = 16$ je upravo 2^4, dakle, $f(2^1) = 4$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$.

Za $n = k + 1$, promotrimo najveću potenciju koja dijeli broj $5^{2^{k+1}} - 3^{2^{k+1}}$. Taj broj možemo zapisati na sljedeći način:

$$5^{2^{k+1}} - 3^{2^{k+1}} = 5^{2^k \cdot 2} - 3^{2^k \cdot 2} = \left(5^{2^k} - 3^{2^k}\right)\left(5^{2^k} + 3^{2^k}\right).$$

Po pretpostavci indukcije, najveća potencija broja 2 koja dijeli prvu zagradu je $f(2^k) = k+3$, dok je najveća potencija broja 2 koja dijeli drugu zagradu 2^1. Naime, $5 \equiv 1 \pmod 4$, pa je $5^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$. S druge strane, $3 \equiv -1 \pmod 4$, pa je i $3^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$. Zbog toga je $5^{2^k} + 3^{2^k} \equiv 2 \pmod 4$, što znači da je taj broj djeljiv s 2, ali nije djeljiv s 4. Slijedi da je $f(2^{k+1}) = f(2^k) + 1 = k + 4$, što je i trebalo dokazati.

Neka je sada $n = 2^m \cdot k$, za neki nenegativni cijeli broj m i neparni prirodni broj k. Očito je $2^m \leqslant n$ pa je $m \leqslant b$. Sada imamo:

$$5^n - 3^n = 5^{2^m \cdot k} - 3^{2^m \cdot k} = \left(5^{2^m} - 3^{2^m}\right) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(5^{2^m}\right)^i \left(3^{2^m}\right)^{k-1-i}.$$

Svaki od pribrojnika u sumi na desnoj strani je neparan pa je cijela suma neparna jer sadrži neparni broj neparnih pribrojnika. Dakle, najveća potencija broja 2 koja dijeli cijeli umnožak je jednaka najvećoj potenciji koja dijeli prvu zagradu. Zaključujemo da je $f(n) = f(2^m)$. Sada imamo:

$$f(n) = f(2^m) = m + 3 \leqslant b + 3,$$

što je i trebalo dokazati.

IZBORNO NATJECANJE 2010. – drugi dio

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n \qquad \text{i} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n^2.$$

Dokaži da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x_i \geqslant 2$.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoje brojevi

$$x_1 < 2, \quad x_2 < 2, \quad \ldots, \quad x_n < 2$$

koji zadovoljavaju dane uvjete.

Kad bi vrijedilo $|x_i| < 2$ za sve $i = 1, \ldots, n$, imali bismo

$$n^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 4n,$$

tj. $n < 4$, što je kontradikcija. Zaključujemo da je barem jedan od promatranih brojeva manji od -2.

Neka su, bez smanjenja općenitosti, $x_1, \ldots, x_k$ nenegativni, a $x_{k+1}, \ldots, x_n$ negativni. Pritom je $k \leqslant n - 1$.

Tada vrijedi

$$0 < -(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n) \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) - n < 2k - n.$$

Iz toga dobivamo

$$\begin{aligned} n^2 &\leqslant x_1^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 \\ &< 4k + (|x_{k+1}| + \cdots + |x_n|)^2 \\ &< 4k + (2k-n)^2 = 4k(k+1-n), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno s $k > n - 1$.

Dobili smo kontradikciju pa je početna pretpostavka bila pogrešna. Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 2.

U svakom vrhu pravilnog n-terokuta $A_1A_2\dots A_n$ nalazi se određeni broj novčića: u vrhu A_k nalazi se točno k novčića, za svaki $k = 1, 2, \dots, n$. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo dva novčića (ne nužno iz istog vrha) i prebacujemo svakog od njih u susjedni vrh, tako da jednog pomičemo u smjeru kretanja kazaljke na satu, a drugog u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu.

Odredi za koje brojeve n je moguće postići da nakon konačnog broja koraka za svaki $k = 1, 2, \dots, n$ u vrhu A_k bude točno $n+1-k$ novčića.

Rješenje.

Neka je a_k broj novčića u vrhu A_k. Promotrimo što se događa s izrazom

$$S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

prilikom izvršavanja transformacije iz zadatka.

Ukoliko ne dolazi do prelaska novčića iz vrha A_1 u A_n ni obratno, onda postoje brojevi i, j ($i > 1$, $j < n$) takvi da novčić iz vrha A_i prelazi u vrh A_{i-1}, dok novčić iz vrha A_j prelazi u vrh A_{j+1}. Nakon izvršene transformacije vrijednost izraza S se promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &-(i-1)a_{i-1} - ia_i - ja_j - (j+1)a_{j+1}\\ &+(i-1)(a_{i-1}+1) + i(a_i - 1) + j(a_j - 1) + (j+1)(a_{j+1}+1) = 0.\end{aligned}$$

Ako novčić iz vrha A_n prelazi u vrh A_1, dok drugi novčić prelazi iz nekog vrha i ($i > 1$) u vrh A_{i-1}, onda se vrijednost izraza S promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &-na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i\\ &+n(a_n - 1) + (a_1 + 1) + (i-1)(a_i + 1) + i(a_i - 1) = -n.\end{aligned}$$

Obratno, ako novčić iz vrha A_1 prelazi u vrh A_n, dok drugi novčić prelazi iz nekog vrha i ($i < 1$) u vrh A_{i+1}, onda se vrijednost izraza S promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &-na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i\\ &+n(a_n + 1) + (a_1 - 1) + i(a_i - 1) + (i+1)(a_i + 1) = n.\end{aligned}$$

Konačno, ukoliko novčić iz vrha A_1 prijeđe u vrh A_n i istovremeno novčić iz vrha A_n prijeđe u vrh A_1 tada očito vrijednost izraza S ostaje nepromijenjena.

Zaključujemo da se izraz S u svakom slučaju promijeni za višekratnik broja n pa je ostatak pri dijeljenju broja S brojem n invarijanta.

Označimo sa S_P početnu vrijednost izraza S te sa S_K vrijednost koju poprimi izraz S ukoliko dođe do konačnog rasporeda opisanog u zadatku.

Tada vrijedi:

$$S_P = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i

$$S_K = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Da bi se traženi konačni raspored mogao postići razlika $S_K - S_P$ treba biti djeljiva s n.

Međutim, ta razlika je jednaka

$$S_K - S_P = -\frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

a taj broj ne može biti djeljiv s n ukoliko n nije relativno prost sa 6.

Zaključujemo da je nužni uvjet da bi se traženi konačni raspored mogao postići da je n relativno prost sa 6, tj. da je n oblika $6k+1$ ili $6k+5$.

Dokažimo da je to i dovoljni uvjet. Pretpostavimo da je n oblika $6k \pm 1$. Tada je n neparan pa postoji prirodni broj m takav da je $n = 2m + 1$.

U vrhu A_1 se na početku nalazi 1 novčić, a na kraju u tome vrhu želimo n novčića što znači da nam nedostaje $n-1$ novčića. S druge strane, u vrhu A_n ima $n-1$ novčića viška. Slično, u vrhu A_2 nam nedostaje $n-3$ novčića, a u vrhu A_{n-1} ima upravo toliko novčića viška. Na taj način možemo vrhove rasporediti u m parova tako prvom vrhu svakog para nedostaje upravo onoliko novčića koliko drugi vrh toga para ima viška. (U vrhu A_{m+1} se na početku nalazi $m+1$ novčić, što je upravo broj novčića koji želimo u tom vrhu na kraju.)

Pogledajmo koliko bismo poteza morali napraviti u jednom smjeru da bismo u svakom paru prebacili odgovarajući broj novčića. Za par (A_1, A_n) imamo $n-1$ novčića koji trebaju prijeći udaljenost 1, za par $(A_2, A_n - 1)$ imamo $n-3$ novčića koji trebaju prijeći udaljenost 3, itd.

Ukupan broj poteza u jednom smjeru potrebnih da bi u svakom polju bio odgovarajući broj novčića je

$$X = 1 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-2) \cdot 2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

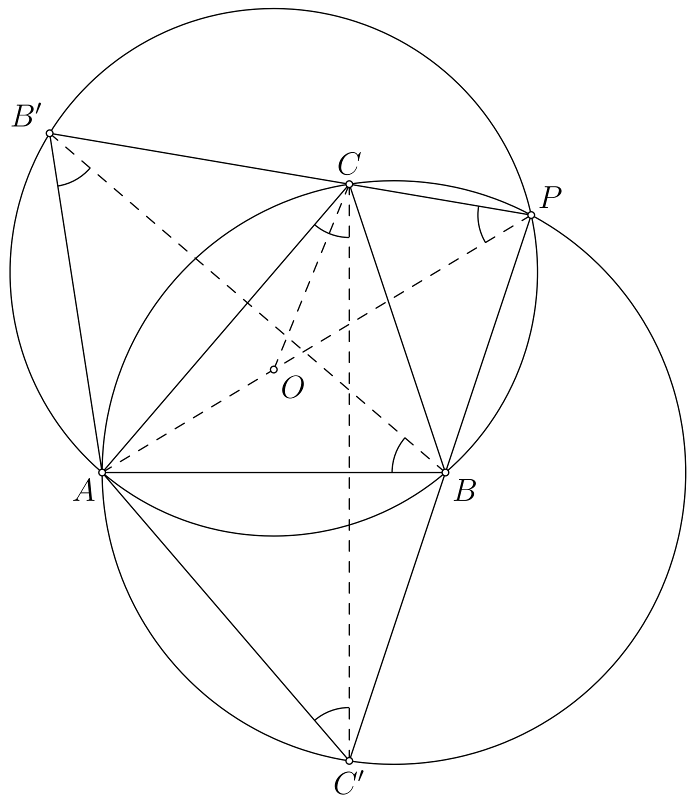
Dakle, odabirom ovih X poteza u jednom smjeru možemo postići da se u svakom vrhu nalazi željeni broj novčića. Preostaje nam dokazati da je moguće napraviti X poteza u suprotnom smjeru koji neće promijeniti raspored novčića.

Primijetimo da je X djeljiv s n zbog uvjeta da je n relativno prost sa 6. Neka je $X = qn$. Tada traženih X poteza u suprotnom smjeru napravimo tako da odaberemo proizvoljni novčić i njega zavrtimo q punih krugova. Lako vidimo da redoslijed ovakih poteza u jednom i drugom smjeru možemo složiti tako da radimo istovremeno po jedan potez u svakom smjeru.

Zadatak 3.

Zadan je šiljastokutni trokut ABC. Neka su točke B' i C' simetrične točkama B i C u odnosu na pravce AC i AB redom. Ako se kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku još u točki P, dokaži da pravac AP prolazi središtem opisane kružnice trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo veličine kutova trokuta ABC na uobičajeni način s α, β i γ.

Neka je točka O središte opisane kružnice trokuta ABC.

Trokut OAC je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle CAO = 90^\circ - \beta$.

Trokuti ABB' i ACC' su zbog simetrije jednakokračni, odakle imamo

$$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle AB'B = 90^\circ - \alpha,$$

$$\sphericalangle ACC' = \sphericalangle AC'C = 90^\circ - \alpha.$$

Četverokuti $ABPB'$ i $AC'PC$ su tetivni, a nad odgovarajućim tetivama $\overline{AB'}$ i $\overline{AC}$ imamo jednake obodne kutove:

$$\sphericalangle APB' = \sphericalangle ABB' = 90^\circ - \alpha, \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle AC'C = 90^\circ - \alpha.$$

Odavde slijedi da su točke B', C i P kolinearne.

Konačno je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle CAP &= \sphericalangle B'CA - \sphericalangle APB' \\
&= \gamma - (90^\circ - \alpha) \\
&= \alpha + \gamma - 90^\circ \\
&= 90^\circ - \beta \\
&= \sphericalangle CAO,
\end{aligned}$$

odnosno točke A, O i P su kolinearne, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoji beskonačni niz prostih brojeva $p_0, p_1, p_2, \ldots$ takav da za svaki prirodni broj k vrijedi

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{ili} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

Rješenje.

Pretpostavimo da takav niz postoji.

Označimo $p = p_0$. Provjerom se pokaže da p mora biti veći od 3. Dakle, mora vrijediti $p \equiv 1 \pmod 3$ ili $p \equiv 2 \pmod 3$.

Pretpostavimo $p \equiv 1 \pmod 3$. Tada je $2p+1$ djeljivo s 3 pa mora vrijediti $p_1 = 2p - 1$ i $p_1 \equiv 1 \pmod 3$. Induktivno zaključujemo $p_k \equiv 1 \pmod 3$, $p_{k+1} = 2p_k - 1$, odnosno

$$p_k = 2p_{k-1} - 1 = 2(2p_{k-2} - 1) - 1 = \ldots = 2^k p - 1 - 2 - \cdots - 2^{k-1} = 2^k p - (2^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je $p > 3$, po malom Fermatovom teoremu vrijedi $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$, tj. $p \mid 2^{p-1} - 1$ pa je p_{p-1} djeljiv s p. Kontradikcija.

U slučaju $p \equiv 2 \pmod 3$ analogno mora vrijediti $p_{k+1} = 2p_k + 1$, tj. $p_k = 2^k p + (2^k - 1)$ i opet vidimo da je p_{p-1} djeljiv s p.

Dakle, takav niz ne postoji.

IZBORNO NATJECANJE 2010. – Izbor IMO ekipe

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Odredi najmanji realni broj D takav da nejednakost

$$\frac{a+b}{a+2b}+\frac{b+c}{b+2c}+\frac{c+a}{c+2a}<D$$

vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a, b i c.

Rješenje.

Prvi pribrojnik u nejednakosti možemo napisati na sljedeći način:

$$\frac{a+b}{a+2b}=\frac{a+2b}{a+2b}-\frac{b}{a+2b}=1-\frac{b}{a+2b}=1-\frac{1}{\frac{a}{b}+2}=1-\frac{1}{x+2},$$

pri čemu smo označili $x=\frac{a}{b}$. Označimo li $y=\frac{b}{c}$ i $z=\frac{c}{a}$, dobijemo da je tražena nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}>3-D$$

uz uvjet $xyz=1$.

Označimo izraz na lijevoj strani s X te izaberimo proizvoljni prirodni broj n. Uvrstimo li $x=n$, $y=n$, $z=\frac{1}{n^2}$ dobijemo:

$$X=\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n+2}=\frac{n^3+6n^2+2}{(2n^2+1)(n+2)}=\frac{1}{2}+\frac{8n^2-n+2}{2\left(2n^3+4n^2+n+2\right)}.$$

Broj $\dfrac{8n^2-n+2}{2\left(2n^3+4n^2+n+2\right)}$ može biti po volji mali pozitivan broj pa X može biti po volji blizu $\frac{1}{2}$.

Preostaje nam dokazati nejednakost: $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}>\dfrac{1}{2}$.

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom vidimo da je ta nejednakost ekvivalentna s

$$2\left(y+2\right)\left(z+2\right)+2\left(z+2\right)\left(x+2\right)+2\left(x+2\right)\left(y+2\right)>\left(x+2\right)\left(y+2\right)\left(z+2\right),$$

odnosno

$$2\left(xy+yz+zx\right)+4\left(x+y+z\right)+24>xyz+2\left(xy+yz+zx\right)+4\left(x+y+z\right)+8,$$

tj. $16>xyz=1$, što očito vrijedi.

Dakle, $3-D=\dfrac{1}{2}$ pa je $D=\dfrac{5}{2}$.

Zadatak 2.

Neka polja pravokutne ploče $n \times m$ $(n, m \geqslant 2)$ obojana su crnom bojom, dok su ostala polja bijela. Izvan ploče nalazi se žaba koja u jednom trenutku skoči na neko rubno polje ploče, a zatim radi niz skokova, skačući svaki put na neko od susjednih polja. (Za dva polja kažemo da su *susjedna* ako imaju zajedničku stranicu.) Svaki put kad žaba doskoči na neko polje, boja tog polja se mijenja, iz bijele u crnu ili obratno.

Postoji li put kojim žaba može proći i napustiti ploču skočivši s rubnog polja tako da nakon toga sva polja budu crne boje?

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da postoji takav put.

Neka je A početno polje žabinog puta. Pretpostavimo da postoje neka polja na ploči (osim možda početnog) koja su bijela.

Neka je B jedno bijelo polje. Žaba nekim putem dođe do polja B i vrati se u polje A istim putem. Nakon toga će jedino polja B i A promijeniti boju. Time se broj bijelih polja (izuzmemo li polje A) smanjio za 1. Zaključujemo da je ponavljajući ovaj postupak moguće postići da su sva polja crna (osim možda polja A).

Ukoliko je u tom trenutku polje A crno, žaba napušta ploču. Ako je polje A bijelo, onda žaba skače na susjedno rubno polje C, vraća se na A, ponovno skače na polje C i napušta ploču.

Drugo rješenje.

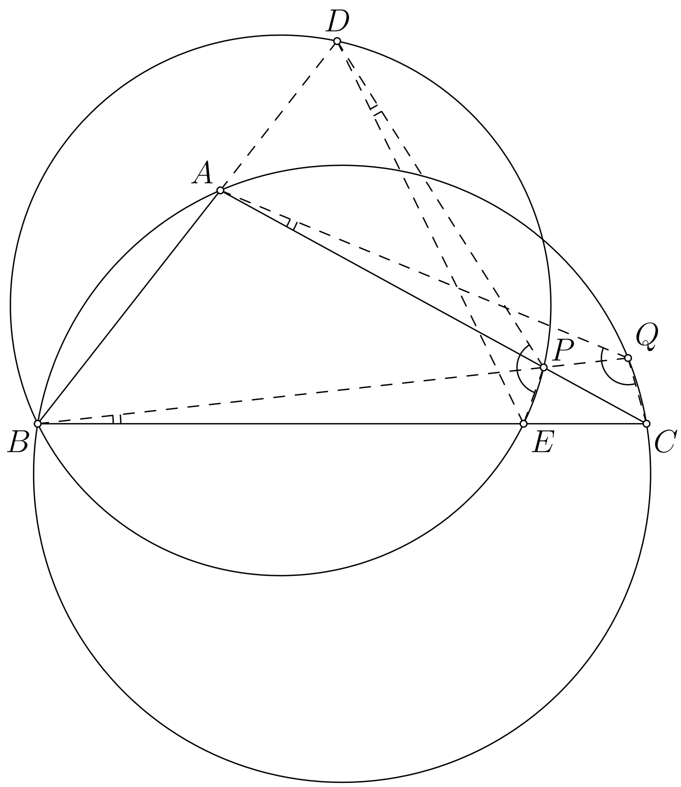
Odaberimo jedan put koji obilazi ploču tako da počne i završi u rubnim poljima i prođe jednom kroz svako polje ploče (npr. prvi red ploče, zatim drugi počevši od posljednjeg mjesta itd.).

Kada žaba, krećući se po tome putu, postigne da je polje kojeg u nekom trenutku napušta crno, nastavi se kretati. U suprotnome, ukoliko napusti bijelo polje, napravi korak unatrag, zacrni to polje i nastavi se kretati po odabranom putu. Na opisani način žaba može postići da su sva polja na njenom putu, osim posljednjeg polja, crna. Posljednje polje može zacrniti na način opisan na kraju prvog rješenja.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut u kojem je $|AB| < |CA| < |BC|$ i neka su D i E redom točke na polupravcima BA i BC takve da je $|BD| = |BE| = |AC|$. Opisana kružnica trokuta BDE siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki P, a pravac BP siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točki Q ($Q \neq B$). Dokaži da je $|AQ| + |QC| = |BP|$.

Rješenje.



Neka je $\beta = \sphericalangle ABC$. S obzirom da su četverokuti $BEPD$ i $ABCQ$ tetivni, nad odgovarajućim tetivama $\overline{DE}$ i $\overline{AC}$ imamo:

$$\sphericalangle DPE = 180^\circ - \sphericalangle DBE = 180^\circ - \beta,$$

$$\sphericalangle AQC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 180^\circ - \beta.$$

Također, promatrajući obodne kutove nad tetivama $\overline{EP}$ i $\overline{CQ}$ dobivamo

$$\sphericalangle EDP = \sphericalangle EBP = \sphericalangle CBQ = \sphericalangle CAQ,$$

stoga su trokuti DEP i ACQ slični.

Iz omjera

$$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|EP|}{|CQ|} = \frac{|PD|}{|QA|}$$

dobivamo

$$|AQ| = \frac{|AC|}{|DE|}\,|PD| \qquad \text{i} \qquad |QC| = \frac{|AC|}{|DE|}\,|EP|,$$

odnosno

$$|AQ| + |QC| = \frac{|AC|}{|DE|} (|EP| + |PD|) .$$

Primjenom Ptolomejevog poučka u tetivnom četverokutu $BEPD$, uz uvjet $|BD| = |BE| = |AC|$, još dobivamo:

$$|BE|\,|PD| + |EP|\,|DB| = |BP|\,|ED| ,$$

$$|AC| (|EP| + |PD|) = |BP|\,|ED| ,$$

odakle je

$$|AQ| + |QC| = \frac{|BP|\,|ED|}{|DE|} = |BP| ,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Neka je $n > 1$ prirodni broj. Dokaži da jednadžba

$$(x+1)^n - x^n = ny$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da je (x, y) rješenje dane jednadžbe. Neka je p najmanji prosti djelitelj broja n.

Budući da je $(x+1)^n - x^n$ djeljivo s p, a x i $x+1$ su relativno prosti, slijedi da p ne dijeli ni x ni $x+1$. Prema malom Fermatovom teoremu je $(x+1)^{p-1} \equiv 1 \equiv x^{p-1} \pmod{p}$. Također, prema pretpostavci je $(x+1)^n \equiv x^n \pmod{p}$.

Nadalje, budući da je p najmanji prosti djelitelj od n, brojevi $p-1$ i n su relativno prosti. Zato postoje cijeli brojevi a i b takvi da je $a(p-1) + bn = 1$.

Sada zaključujemo

$$x + 1 = (x+1)^{a(p-1)+bn} \equiv x^{a(p-1)+bn} = x \pmod{p},$$

što je nemoguće. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna i vrijedi tvrdnja zadatka.

IZBORNO NATJECANJE 2010. – Izbor MEMO ekipe

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokaži da je

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Prvo rješenje.

Prema A–G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^2+c}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2+c}\cdot\frac{b^2+c}{4}}=a^2.$$

Analogno dobijemo:

$$\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^2+a}{4}\geqslant b^2$$

i

$$\frac{c^4}{a^2+b}+\frac{a^2+b}{4}\geqslant c^2.$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobijemo:

$$\left(\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\right)+\left(\frac{b^2+c}{4}+\frac{c^2+a}{4}+\frac{a^2+b}{4}\right)\geqslant a^2+b^2+c^2,$$

odnosno

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geqslant\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{4}\left(a+b+c\right). \qquad (*)$$

Međutim, zbog A–K nejednakosti vrijedi:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3},$$

odnosno $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

Uvrštavanjem te nejednakosti i zadanog uvjeta u nejednakost (**??**) dobijemo:

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geqslant\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

Drugo rješenje.

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti (ili težinske A–K nejednakosti) dobivamo

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b} \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+3}. \qquad (**)$$

Korištenjem A–K nejednakosti imamo

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=3.$$

Uvedimo zamjenu $x=a^2+b^2+c^2$. Vrijedi $x \geqslant 3$, pa iz (**??**) zaključujemo da je dovoljno dokazati da vrijedi

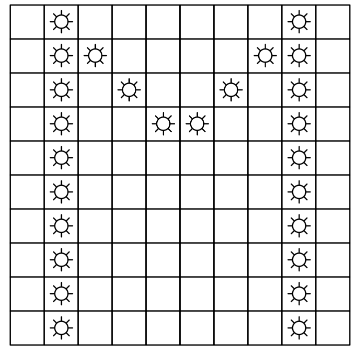
$$\frac{x^2}{x+3} \geqslant \frac{3}{2}.$$

No, ta je nejednakost ekvivalentna s $(x-3)(2x+3) \geqslant 0$ i očito vrijedi za $x \geqslant 3$.

Napomena. Gornju nejednakost smo mogli dokazati i ovako:

$$\frac{x^2}{x+3}=\frac{x}{1+\frac{3}{x}} \geqslant \frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Zadatak 2.



Na svakom polju ploče $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ nalazi se žarulja koja može biti upaljena ili ugašena.

U svakom koraku biramo jedan kvadrat 2×2 na toj ploči i unutar njega sve upaljene žarulje ugasimo, a ugašene upalimo. Za raspored upaljenih žarulja kažemo da je *dobar* ako se može postići da, počevši od njega, nakon konačno mnogo koraka, sve žarulje budu ugašene.

a) Dokaži da raspored prikazan na slici nije dobar.
(Prikazan je položaj svih upaljenih žarulja na ploči 10×10.)

b) Koliko bi, u tom primjeru, minimalno dodatnih žarulja na početku trebalo upaliti da raspored bude dobar?

c) Odredi broj svih mogućih dobrih početnih rasporeda za $n \times n$ ploču.

Rješenje.

a) Primijetimo da je za svaki dobar raspored nužno da je u svakom retku i stupcu parno mnogo upaljenih žarulja.

Budući da se u svakom koraku u određenom retku (odn. stupcu) broj upaljenih žarulja promjeni za 2, 0 ili -2, parnost broja upaljenih žarulja u nekom retku (odnosno stupcu) uvijek ostaje ista. Budući da je u trenutku kad su sve žarulje ugašene broj upaljenih očito paran u svakom retku (odnosno stupcu) takav mora biti i na početku.

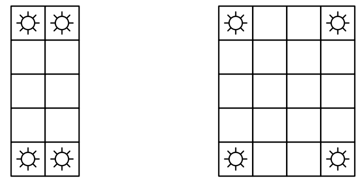
Prema tome, raspored na slici nije dobar jer je postoje stupci u kojima je neparno mnogo upaljenih žarulja (npr. treći stupac).

b) Budući da je u 3., 4., 5., 6., 7. i 8. stupcu neparan broj upaljenih žarulja, nužno je dodati još barem 6 žarulja, po jednu u svaki stupac, na način da broj upaljenih žarulja po recima ostane paran. Pokažimo da je to i dovoljno.

Primjerice, dodajmo 6 žarulja na mjesta $(1,3), \ldots, (1,8)$. Primjenom postupka na potkvadrate koji počinju na mjestima $(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,4), (2,6), (3,5)$ ostaju upaljene samo žarulje na mjestima $(3,2), \ldots, (10,2)$ i $(3,9), \ldots, (10,9)$. Primjenom postupka na potkvadrate koji počinju na mjestima $(3,2), (3,3), \ldots, (3,8)$, sve žarulje u 3. i 4. retku su ugašene. Analogno gasimo žarulje u 5. i 6., 7. i 8. te 9. i 10. retku.

Prema tome, minimalni broj dodatnih žarulja koje treba upaliti je šest.

c) Tvrdimo da je za svaki dobar raspored nužno i dovoljno da je u svakom retku i stupcu parno mnogo upaljenih žarulja. Nužnost smo pokazali u a) dijelu, a dovoljnost pokazujemo induktivno. Uzastopnom primjenom operacije na 2×2 kvadrate koji imaju po dva horizontalno susjedna kvadratića u presjeku, zaključujemo da možemo u konačno mnogo koraka promjeniti upaljene u ugašene žarulje i obrnuto koje se nalaze u bilo koja dva retka i dva uzastopna stupca,



Analogno, možemo zaključiti da u konačno mnogo koraka možemo promjeniti upaljene u ugašene žarulje i obrnuto koje nalaze u bilo koja dva retka i dva stupca,

Sada za bilo koju žarulju koja je upaljena (s koordinatama npr. (x, y)) znamo da postoji u istom retku i istom stupcu barem po još jedna upaljena žarulja, npr. (x, z) i (w, y). Ako je žarulja s koordinatama (w, z) upaljena onda prema gore dokazanom možemo ugasiti sve te 4 žarulje. Ako je žarulja s koordinatama (w, z) ugašena onda prema gore dokazanom možemo upaljene 3 žarulje ugasiti, a jednu ugašenu upaliti što povlači da ćemo sigurno smanjiti broj upaljenih žarulja.

Na kraju prebrojimo tražene rasporede.

Primijetimo da u svakom od prvih $n-1$ redaka može prvih $n-1$ žarulja biti upaljeno ili ugašeno, a prema parnosti broja upaljenih među tih prvih $n-1$ jedinstveno je određeno je li posljednja žarulja upaljena ili ugašena. Dakle, za svaki od prvih $n-1$ redaka imamo 2^{n-1} mogućnosti, a za sve njih zajedno $2^{(n-1)^2}$.

U posljednjem retku mora biti upaljen parni broj žarulja. Budući da je u prvih $n-1$ redaka upaljen parni broj žarulja, broj stupaca u kojima je neparno mnogo upaljenih žarulja je paran. Točno u tim stupcima u zadnjem retku moraju biti upaljene žarulje. Dakle, traženi broj rasporeda je $2^{(n-1)^2}$.

Drugo rješenje c) dijela.

Nazovimo postupak kojim se od dobrog rasporeda dolazi do ugašenih žarulja *gašenje* rasporeda, a korak u kojem u odabranom 2×2 kvadratu upaljene žarulje postaju ugašene (i obratno) *mijenjanje* tog kvadrata.

Primijetimo da u gašenju nekog dobrog početnog rasporeda nije važno kojim redoslijedom mijenjamo potkvadrate, te da nijedan potkvadrat ne trebamo mijenjati više od jednom.

Dakle, dobar početni raspored možemo identificirati sa skupom potkvadrata koji se mijenjaju prilikom njegovog gašenja. Primijetimo da je taj skup jedinstven. Naime, žarulja na mjestu $(1, 1)$ može biti ugašena samo mijenjanjem potkvadrata koji počinje na tom mjestu, pa ako je ona upaljena u početnom rasporedu taj potkvadrat mora biti u skupu, a ako je ugašena onda nije u skupu. Sada kada znamo da li je taj potkvadrat uključen u skup, na isti način je, ovisno o žarulji na mjestu $(2, 1)$ jednoznačno određeno da li je potkvadrat koji počinje na mjestu $(2, 1)$ uključen u skup. Na ovaj način možemo induktivno na jedinstven način odrediti za svaki potkvadrat da li je uključen ili ne.

Obratno, za svaki skup 2×2 potkvadrata ploče postoji dobar početni raspored koji se gasi tim skupom (ako krenemo od potpuno ugašene ploče i promijenimo sve potkvadrate iz skupa, dolazimo do traženog dobrog početnog rasporeda).

Prema tome, broj dobrih početnih rasporeda je jednak broju mogućih odabira nekih od 2×2 potkvadrata. Takvih potkvadrata ukupno ima $(n-1)^2$, pa je traženi broj $2^{(n-1)^2}$.

Zadatak 3.

Unutar trokuta ABC dana je točka P takva da je

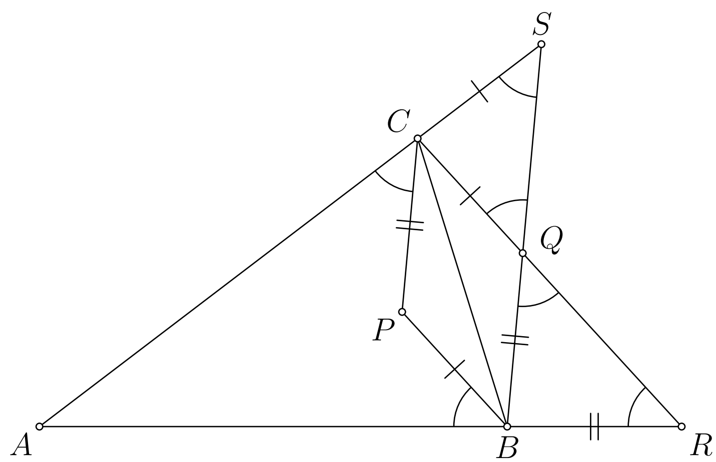
$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = \frac{1}{3}\left(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA\right).$$

Dokaži da je $\quad \dfrac{|AB|}{|AC|+|PB|} = \dfrac{|AC|}{|AB|+|PC|}$.

Prvo rješenje.

Označimo s α, β i γ redom kutove pri vrhovima A, B i C trokuta ABC.

Neka je $\varphi = \sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA$ pa je $3\varphi = \beta + \gamma$.



Neka je točka Q sa suprotne strane pravca BC od točke P takva da je četverokut $BQCP$ paralelogram, točka R sjecište pravaca AB i CQ, a točka S sjecište pravaca AC i BQ.

Kako je

$$\sphericalangle ARC = \sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = \sphericalangle BSA = \varphi,$$

trokuti ARC i ASB su slični, odakle je

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AR|}.$$

S druge strane je

$$\sphericalangle RQB = \sphericalangle QCP = 180^\circ - \sphericalangle BPC = (\beta - \varphi) + (\gamma - \varphi) = \varphi = \sphericalangle ARC$$

pa je trokut RQB jednakokračan. Zato je

$$|AR| = |AB| + |BR| = |AB| + |BQ| = |AB| + |PC|.$$

Analogno dokazujemo da je i trokut QSC jednakokračan te dobivamo

$$|AS| = |AC| + |CS| = |AC| + |CQ| = |AC| + |PB|.$$

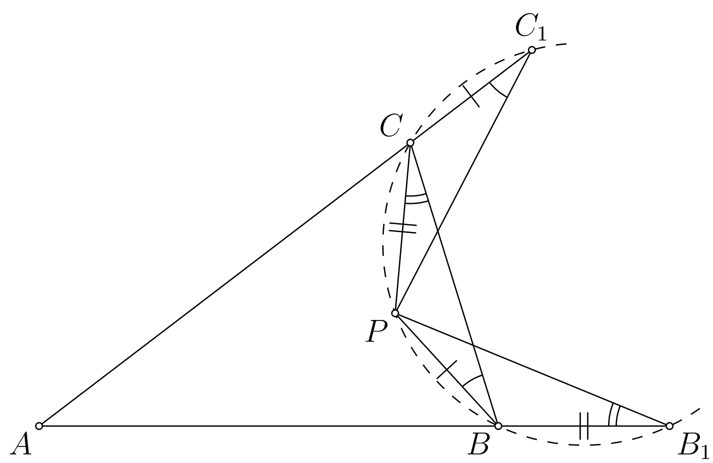
Konačno je

$$\frac{|AB|}{|AC|+|PB|} = \frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AR|} = \frac{|AC|}{|AB|+|PC|},$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Uz iste oznake za veličine kutova trokuta ABC i uvjet $3\varphi = \beta + \gamma$ kao u prvom rješenju, označimo s B_1 točku na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B za koju je $|BB_1| = |PC|$, a s C_1 točku na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha C za koju je $|CC_1| = |PB|$.



S obzirom da je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BPC &= 180^\circ - (\beta - \varphi) - (\gamma - \varphi) = 180^\circ - \varphi,\\
\sphericalangle PBB_1 &= (\beta - \varphi) + (180^\circ - \beta) = 180^\circ - \varphi,\\
\sphericalangle PCC_1 &= (\gamma - \varphi) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \varphi,
\end{aligned}$$

trokuti BPC, PBB_1 i C_1CP su sukladni.

Stoga iz

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CC_1P = \beta - \varphi \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle PB_1B = \gamma - \varphi$$

zaključujemo da su točke C_1, C, P, B i B_1 konciklične.

Konačno, iz potencije točke A s obzirom na kružnicu opisanu četverokutu C_1CBB_1 slijedi:

$$|AB|\,|AB_1| = |AC|\,|AC_1|\,,$$

$$\begin{aligned}
|AB|\,(|AB| + |BB_1|) &= |AC|\,(|AC| + |CC_1|)\,,\\
|AB|\,(|AB| + |PC|) &= |AC|\,(|AC| + |PB|)\,,\\
\frac{|AB|}{|AC|+|PB|} &= \frac{|AC|}{|AB|+|PC|},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Treće rješenje.

Uz uobičajene oznake za duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC, neka je $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \varphi$. Zadano je $3\varphi = \beta + \gamma$.

U trokutu BCP imamo:

$$\sphericalangle PBC = \beta - \varphi, \quad \sphericalangle PCB = \gamma - \varphi,$$

$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - (\beta - \varphi) - (\gamma - \varphi) = 180^\circ - (\beta + \gamma) + 2\varphi = 180^\circ - \varphi,$$

stoga primjenom poučka o sinusima u tom trokutu dobivamo

$$\frac{|PB|}{|BC|} = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin\varphi}, \qquad \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin\varphi},$$

odnosno

$$|PB| = \frac{a}{\sin\varphi}\sin(\gamma - \varphi), \qquad |PC| = \frac{a}{\sin\varphi}\sin(\beta - \varphi).$$

Zato je jednakost

$$\frac{|AB|}{|AC| + |PB|} = \frac{|AC|}{|AB| + |PC|}$$

redom ekvivalentna s

$$c\left(c + \frac{a}{\sin\varphi}\sin(\beta - \varphi)\right) = b\left(b + \frac{a}{\sin\varphi}\sin(\gamma - \varphi)\right),$$

$$c^2 - b^2 = \frac{a}{\sin\varphi}\big(b\sin(\gamma - \varphi) - c\sin(\beta - \varphi)\big).$$

Dijeljenjem s $4R^2$, gdje je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC, zbog poučka o sinusima dobivamo

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\big(\sin\beta\sin(\gamma - \varphi) - \sin\gamma\sin(\beta - \varphi)\big)$$

pa je tražena jednakost dalje ekvivalentna s

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta = \frac{\sin\alpha}{2\sin\varphi}\big(\cos(\beta - \gamma + \varphi) - \cos(\gamma - \beta + \varphi)\big),$$

$$(\sin\gamma + \sin\beta)(\sin\gamma - \sin\beta) = \frac{\sin\alpha}{2\sin\varphi}\cdot 2\sin\varphi\sin(\gamma - \beta),$$

$$2\sin\frac{\gamma + \beta}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\gamma + \beta}{2}\sin\frac{\gamma - \beta}{2} = \sin\alpha\sin(\gamma - \beta),$$

$$\sin(\gamma + \beta)\sin(\gamma - \beta) = \sin(\gamma + \beta)\sin(\gamma - \beta),$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoje prosti broj p i prirodni brojevi a i n ($n \geqslant 2$) takvi da vrijedi

$$2^p + 3^p = a^n.$$

Rješenje.

Ako je $p = 2$, onda je $2^p + 3^p = 13$ pa bismo imali $n = 1$, što je suprotno pretpostavci zadatka.

Pretpostavimo da je $p > 2$ i neka je $2^p + 3^p = a^n$ za neki prirodni broj $n > 1$.

Kako je p neparan broj, to je

$$a^n = 2^p + 3^p = (2+3)\left(2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1}\right)$$

pa je a djeljiv s 5. Broj na desnoj strani je zato djeljiv s 5^n. Kako je $n > 1$, taj broj je djeljiv (barem) s 25 pa zaključujemo da izraz u drugoj zagradi na desnoj strani mora biti djeljiv s 5.

S obzirom da je $3 \equiv -2 \pmod 5$ imamo:

$$2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1} \equiv 2^{p-1} + 2^{p-2} \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 2^{p-2} + 2^{p-1} \equiv p \cdot 2^{p-1} \pmod 5.$$

Slijedi da je p djeljiv s 5, a budući da je p prost broj, preostaje samo mogućnost $p = 5$. Međutim,

$$2^5 + 3^5 = 275 = 5^2 \cdot 11$$

što nije broj oblika a^n za $n > 1$.