

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 16. – 19. svibnja 1996. godine

I. razred

1. Dokažite da je izraz

$$a^4 - 10a^2 + 9$$

djeljiv s 1920 za svaki prosti broj $a > 5$.

2. Brojevi a, b, c, d zadovoljavaju relaciju $a + b + c + d = 0$. Neka je $S_1 = ab + bc + cd$ i $S_2 = ac + ad + bd$. Pokažite da je

$$5S_1 + 8S_2 \leq 0 \quad \text{i} \quad 8S_1 + 5S_2 \leq 0.$$

3. Zadan je konveksan peterokut $ABCDE$. Neka su M, N, P, Q redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ te neka su R i S polovišta dužina $\overline{MP}$ i $\overline{QN}$. Pokažite da je

$$|SR| = \frac{1}{4}|AE|.$$

4. Četiri kružnice polumjera a sa središtima u vrhovima kvadrata stranice duljine a , dijele taj kvadrat na devet područja. Odredite površinu svakog od pojedinih područja ako je dana površina Q kvadrata, površina K kruga polumjera a i površina T jednakostraničnog trokuta duljine stranice a .

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 16. – 19. svibnja 1996. godine

II. razred

1. Ako funkcija f zadovoljava uvjete

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$,

(c) $f(\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$,

koliko je $f(\sqrt{1996})$?

2. Za koje realne brojeve a, b su moduli svih korijena jednadžbe $z^3 + az^2 + bz - 1 = 0$ jednaki 1?

3. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ konveksan četverokut, S sjecište njegovih dijagonala. Označimo sa s_k površinu trokuta A_kSA_{k+1} , ($A_5 = A_1$), $k = 1, 2, 3, 4$. Dokažite da je

$$s_2^2 = s_1s_3 \quad \text{ i } \quad 2s_4 = s_1 + s_3$$

ako i samo ako je $A_1A_2A_3A_4$ paralelogram.

4. Neka je $\overline{OA}$ polumjer i $\overline{OB}$ tetiva kružnice k polumjera R , C sjecište pravca OB i tangente na k u točki A , T točka na dužini $\overline{OB}$ takva da je $|OT| = |BC|$ i T' projekcija od T na $\overline{OA}$. Izrazite $y = |T'T|$ kao funkciju od $x = |OT'|$.

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. - 19. svibnja 1996. godine

III. razred

1. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x \leq 2.$$

Kada vrijedi jednakost?

2. Neka su h_1, h_2, h_3 duljine visina trokuta ABC na stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, redom, a u, v, w udaljenosti točke M iz unutrašnjosti trokuta od stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$. Dokažite:

$$\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geq 9,$$

$$h_1 h_2 h_3 \geq 27uvw,$$

$$(h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geq 8uvw.$$

3. Pravilna četverostrana piramida presječena je ravninom koja prolazi jednim vrhom baze i okomita je na nasuprotni pobočni brid. Površina presjeka dvaput je manja od površine baze. Odredite prikloni kut pobočnog brida i baze.
4. Neka su α i β pozitivni iracionalni brojevi takvi da je $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, te $A = \{[n\alpha] | n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{[n\beta] | n \in \mathbb{N}\}$. Dokažite da je tada $A \cup B = \mathbb{N}$ i $A \cap B = \emptyset$.

Naputak: Možete dokazati ekvivalentnu tvrdnju: Za funkciju $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\pi(m) = \text{Card}\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq m, k \in A\} + \text{Card}\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq m, k \in B\}$$

vrijedi $\pi(m) = m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

($[x]$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. – 19. svibnja 1996. godine

IV. razred

1. Postoji li rješenje jednadžbe

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345?$$

($[x]$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

2. Za koje vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ su sva rješenja jednadžbe

$$(x + i\lambda_1)^n + (x + i\lambda_2)^n = 0$$

realna? Odredite ta rješenja.

3. Odredite funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, neprekidne u nuli, koje zadovoljavaju ovu relaciju

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2, \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R},$$

gdje je $t \in (0, 1)$ dani fiksni broj.

4. Neka su α i β pozitivni iracionalni brojevi i $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, te $A = \{[n\alpha] | n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{[n\beta] | n \in \mathbb{N}\}$. Dokažite da je tada $A \cup B = \mathbb{N}$ i $A \cap B = \emptyset$.

Naputak: Možete dokazati ekvivalentnu tvrdnju: Za funkciju $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\pi(m) = \text{Card}\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq m, k \in A\} + \text{Card}\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq m, k \in B\}$$

vrijedi $\pi(m) = m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$.