

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

I. razred

1. Duljina srednjice trapeza je 4 a kutovi uz jednu osnovicu su 40° i 50° . Odredite duljine osnovica ako je udaljenost njihovih polovišta jednaka 1.
2. Dokažite da za bilo koje pozitivne brojeve a, b, c i bilo koji nenegativan pozitivan broj p vrijedi nejednakost

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^p bc + b^p ca + c^p ab.$$

3. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576.$$

Naputak: Izraz s lijeve strane jednadžbe rastavite na faktore.

4. "Kolo sreće" podijeljeno je na 30 odjeljaka u koje su upisani brojevi 50, 100, 150, ..., 1500 (u nekom redoslijedu). Dokažite da postoje tri uzastopna odjeljka u kojima je zbroj upisanih brojeva veći ili jednak 2350.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

II. razred

1. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

2. Neka su a , b , c realni brojevi veći od 1. Dokažite sljedeću nejednakost

$$\log_a \left(\frac{b^2}{ac} - b + ac \right) \log_b \left(\frac{c^2}{ab} - c + ab \right) \log_c \left(\frac{a^2}{bc} - a + bc \right) \geq 1.$$

3. Ako za trokute s duljinama stranica a , b , c i a' , b' , c' te nasuprotnim kutovima α , β , γ i α' , β' , γ' vrijede jednakosti $\alpha + \alpha' = \pi$ i $\beta = \beta'$, dokažite da vrijedi i jednakost $aa' = bb' + cc'$.

4. Odredite sve pozitivne cijele brojeve n za koje jednadžba

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

ima točno pet rješenja (x, y) u skupu pozitivnih cijelih brojeva.

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

III. razred

1. U trokutu ABC kutovi $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$ su šiljasti. S vanjske strane trokuta nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, kao bazama, konstruirani su jednakokračni trokuti ACD i BCE s vršnim kutovima $\sphericalangle ADC = \beta$, odnosno $\sphericalangle BEC = \alpha$. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC . Dokažite da je $|DO| + |EO|$ jednako opsegu trokuta ABC ako i samo ako je $\sphericalangle ACB$ pravi.
2. Dokažite da se prirodan broj može prikazati kao zbroj dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva ako i samo ako taj broj nije potencija broja 2.
3. Na dijagonalama $\overline{AB_1}$ i $\overline{CA_1}$ bočnih strana ABB_1A_1 i CAA_1C_1 trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ dane su točke E i F takve da je $EF \parallel BC_1$. Nađite omjer duljina dužina $\overline{EF}$ i $\overline{BC_1}$.
4. Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. (Ogrlica može biti i bez kamenja.) Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ različitih vrsta kamenja, i da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

IV. razred

1. Izračunajte beskonačni zbroj $s = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} + \dots$, gdje je $|x| < 1$.
2. Vrhovi kocke u prostornom koordinatnom sustavu s ishodištem O su u točkama $A(1, 1, 1)$, $A'(-1, -1, -1)$, $B(-1, 1, 1)$, $B'(1, -1, -1)$, $C(-1, -1, 1)$, $C'(1, 1, -1)$, $D(1, -1, 1)$, $D'(-1, 1, -1)$. Točka O je središte kocki opisane sfere. Neka točka T nije na toj sferi i $d = |OT|$. Označimo s $\alpha = \sphericalangle ATA'$, $\beta = \sphericalangle BTB'$, $\gamma = \sphericalangle CTC'$ i $\delta = \sphericalangle DTD'$. Dokažite da je

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \delta = \frac{32d^2}{(d^2 - 3)^2}.$$

3. Neka je $f(x) = x^{2002} - x^{2001} + 1$. Dokazati da su za svaki prirodan broj m brojevi m , $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ..., u parovima relativno prosti, tj. da nikoja dva među njima nemaju zajednički djelitelj veći od 1.
4. Neka je (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ rastući niz prirodnih brojeva. Za član a_k tog niza kažemo da je *dobar* ako se može prikazati kao suma nekih drugih (ne nužno različitih) članova tog niza. Dokažite da su svi članovi tog niza, osim njih konačno mnogo, *dobri*.