

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Crikvenica, 12. - 15. svibnja 1994.

I. razred

1. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}.$$

2. Neka su a i b duljine osnovica trapeza. Dokažite:

- (a) Duljina dužine paralelne s osnovicama, koja raspolavlja površinu trapeza, jednaka je $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$ (kvadratna sredina).
- (b) Duljina spojnice polovišta krakova jednaka je $\frac{a+c}{2}$ (aritmetička sredina).
- (c) Duljina dužine paralelne s osnovicama, koja dijeli trapez na dva međusobno slična trapeza, jednaka je $\sqrt{ac}$ (geometrijska sredina).
- (d) Duljina dužine paralelne s osnovicama kroz sjecište dijagonala, kojoj su krajevi na krakovima, jednaka je $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$ (harmonijska sredina).

3. Riješite sustav jednadžbi

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$

.....

$$2x_{1993} - 5x_{1994} + 3x_1 = 0$$

$$2x_{1994} - 5x_1 + 3x_2 = 0.$$

4. Pokažite da za svaka dva pozitivna broja p i q vrijedi nejednakost

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq.$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

II. razred

1. Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$|z^2 + 1| = 2|z| \quad \text{i} \quad |z - 3i| = \sqrt{10}.$$

2. Neka je $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Označimo sa D diskriminantu, sa P umnožak, a sa S zbroj njezinih nultočaka. Pokažite da postoji samo jedna funkcija f za koju su a, D, P, S četiri uzastopna cijela broja (u rastućem poretaku).

3. Odredite šiljaste kutove pravokutnog trokuta kojemu se polumjeri opisane i upisane kružnice odnose kao $5 : 2$.

4. Riješite jednadžbu

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)^3 - \log_4(x + 6)^3.$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

III. razred

1. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC izabrana je točka P tako da je $|PA| = m, |PB| = n, |PC| = d$. Pokažite da je
$$a^2m^2 + b^2n^2 = c^2d^2,$$
gdje je $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$.
2. Riješite jednadžbu
$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right) = \frac{1}{x^2} + x^2.$$
3. Volumen kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jednak je V . Nađite volumen zajedničkog dijela tetraedara $AB_1 C D_1$ i $A_1 B C_1 D$.
4. U ravnini je dano pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sa cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoji bar jedan par (P_i, P_j) za $i \neq j$ tako da pravac $P_i P_j$ sadrži neku točku Q sa cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_i i P_j .

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Crikvenica, 12. – 15. svibnja 1994.

IV. razred

1. Ako je jedan član beskonačnog aritmetičkog niza u skupu prirodnih brojeva potpuni kvadrat, dokažite da takvih članova ima beskonačno mnogo.
2. Neka je z kompleksan broj i $w = f(z) = \frac{2}{3-z}$.
 - (a) Odredite skup $\{w : z = 2 + iy, y \in \mathbf{R}\}$ u kompleksnoj ravnini.
 - (b) Pokažite da se funkcija w može zapisati u obliku $\frac{w-1}{w-2} = \lambda \frac{z-1}{z-2}$.
 - (c) Neka je $z_0 = \frac{1}{2}$ i niz (z_n) definiran sa
$$z_n = \frac{2}{3-z_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$
Koristeći svojstvo (b) izračunajte limes niza (z_n) .
3. Odredite polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima takav da za neki $n \in \mathbf{N}$. vrijedi
$$xP(x-n) = (x-1)P(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$
4. U ravnini je dano pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sa cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoji bar jedan par (P_i, P_j) za $i \neq j$ tako da pravac P_iP_j sadrži neku točku Q sa cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_i i P_j .