

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 – 16. svibnja 1993. godine

I. razred

1. Kugla polumjera R presječena je s dvije paralelne ravnine tako da je središte kugle izvan sloja određenog tim ravninama. Neka su P_1 i P_2 površine presjeka, a d međusobna udaljenost danih ravnina. Nađite površinu presjeka kugle ravninom koja je paralelna danim ravninama i jednako od njih udaljena.
2. Odredite četveroznamenkasti broj oblika $\overline{aabb}$ koji je potpuni kvadrat.
3. Dokažite da se svaki poligon opsega 1 može prekriti krugom polumjera $\frac{1}{4}$.
4. Za koje $n \in \mathbb{N}$ je izraz $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ cjelobrojan?

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 – 16. svibnja 1993. godine

II. razred

1. Riješite u skupu $\mathbf{R}$ nejednadžbu

$$\left| \frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4} \right| < 1.$$

2. Odredite sve trojke prirodnih brojeva x, y, z za koje vrijedi

$$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2} = 1.$$

3. Dane su točke A i B u ravnini. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka M takvih da je $|AM|^2 - |BM|^2 = k$ (gdje je k dani broj), pravac okomit na pravac AB .
4. Oko kružnice su na bilo koji način opisani trokut i kvadrat. Dokažite da je duljina dijela opsega kvadrata unutar trokuta veća od dijela izvan njega.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE
POKRET "ZNAOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Varaždin, 13 – 16. svibnja 1993. godine

III. razred

1. U pravokutnom trokutu ABC stranica AB je hipotenuza, a težišnice AA' i BB' se sijeku u težištu T . Dokažite da je $\cos \angle ATB' \geq \frac{4}{5}$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakokračan.
2. Unutar kružnice polumjera R nalazi se n manjih kružnica polumjera $r_1, r_2, \dots, r_n$ takvih da je $r_1 + r_2 + \dots + r_n > 4R$. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem 5 manjih kružnica.
3. Nad stranicama AB i BC trokuta ABC konstruirani su jednakokranični trokuti ADB i CBE . Ako je T težište trokuta CBE , a P polovište dužine AC dokažite da je $\angle DPT$ pravi kut.
4. U trokutu s duljinama stranica a, b, c i nasuprotnim kutovima α, β, γ definira se tzv. Brocardov kut ω formulom
$$m = \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$
 - (a) Izrazite zbrojeve $a^2 + b^2 + c^2$, $a^4 + b^4 + c^4$ i $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$ pomoću veličine m i površine P trokuta koristeći prethodno dokazanu formulu
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16P^2.$$
 - (b) Dokažite da je $m \geq 3$. Što to znači za kut ω ? Za koje trokute vrijedi jednakost?
 - (c) Dokažite da ne postoji trokut kod kojeg su a, b, c, m cijeli brojevi.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE
POKRET "ZNAOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE
KULTURE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Varaždin, 13 - 16. svibnja 1993. godine

IV. razred

1. Zadan je niz $\{a_n\}$ rekursivnom formulom

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b}{2}, \quad 0 < b \leq 1, \quad a_0 = 0.$$

Pokažite da je niz konvergentan i izračunajte mu limes.

2. Unutar kružnice polumjera R nalazi se n manjih kružnica polumjera $r_1, r_2, \dots, r_n$ takvih da je $r_1 + r_2 + \dots + r_n > 4R$. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem 5 manjih kružnica.
3. Nad stranicama AB i BC trokuta ABC konstruirani su jednakokranični trokuti ADB i CBE . Ako je T težište trokuta CBE , a P polovište dužine AC dokažite da je $\angle DPT$ pravi kut.
4. U trokutu s duljinama stranica a, b, c i nasuprotnim kutovima α, β, γ definira se tzv. Brocardov kut ω formulom

$$m = \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

- (a) Izrazite zbrojeve $a^2 + b^2 + c^2$, $a^4 + b^4 + c^4$ i $b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2$ pomoću veličine m i površine P trokuta koristeći prethodno dokazanu formulu

$$2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16P^2.$$

- (b) Dokažite da je $m \geq 3$. Što to znači za kut ω ? Za koje trokute vrijedi jednakost?
- (c) Dokažite da ne postoji trokut kod kojeg su a, b, c, m cijeli brojevi.