

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

I. razred

1. U pravokutni trokut ABC s duljinom hipotenuze c i pripadnom visinom h upisan je kvadrat $DEFG$ sa dva susjedna vrha D, E na hipotenuzi $\overline{AB}$ i po jednim vrhom F i G na katetama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Izračunajte duljinu x stranice tog kvadrata i dokažite jednakost $|AD| \cdot |BE| = x^2$.

2. Dokažite identitet

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2 + a_3)} + \dots + \frac{a_n}{a_1(a_n + a_1)} = \\ & = \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2 + a_3)} + \dots + \frac{a_1}{a_n(a_n + a_1)}. \end{aligned}$$

3. Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}} - 2\sqrt{2x + 3 - 4\sqrt{2x - 1}} + \\ & + 3\sqrt{2x + 8 - 6\sqrt{2x - 1}} = 4. \end{aligned}$$

4. Dokažite da postoji broj oblika $\overline{\dots 1995}$ djeljiv sa 1999.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

II. razred

1. Neka su a, b, c kompleksni brojevi takvi da je $|a| = |b| = |c| = 1$.

(a) Ako je $a + b + c \neq 0$, pokažite da je

$$\left| \frac{bc + ca + ab}{a + b + c} \right| = 1.$$

(b) Pokažite da je

$$\frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{abc}$$

realan broj.

2. Za koje cijele brojeve x izraz $x^2 + 1$ dijeli $x^3 - 8x^2 + 2x$?
3. Zadan je trokut ABC s visinama h_a, h_b, h_c . Sjecišta simetrala kutova s nasuprotnim stranicama označimo s D, E, F , a udaljenosti točaka D, E, F od pravaca AB, BC, CA redom sa d_a, d_b, d_c . Dokažite nejednakost

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Na željezničkoj pruzi dugačkoj 56 km ima 11 postaja $A_1, A_2, \dots, A_{11}$. Udaljenosti oblika $d(A_i, A_{i+2})$, ($i = 1, 2, \dots, 9$) nisu veće od 12 km, a udaljenosti oblika $d(A_i, A_{i+3})$, ($i = 1, 2, \dots, 8$) nisu manje od 17 km. Kolika je udaljenost $d(A_2, A_7)$?

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske
Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

III. razred

1. Nađite najveći prirodan broj n koji je djeljiv sa svim prirodnim brojevima k takvima da je $k \leq \sqrt{n}$.
2. (a) Služeći se poznatim formulama $a = 2R \sin \alpha$ i $s - a = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ u trokutu ABC s polumjerima R i r opisane i upisane kružnice i poluopsegom s i izražavajući $\sin \alpha$ i $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ pomoću $\cos \alpha$ pokažite da je broj $\cos \alpha$ rješenje jednadžbe
$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - s^2 = 0.$$
(b) Izrazite brojeve $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ i $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ pomoću duljina R, r i s .
(c) Pokažite da je zbroj orijentiranih udaljenosti središta O opisane kružnice trokuta ABC od pravaca BC, CA, AB jednaka $R + r$, ako se orijentirana udaljenost točke O od npr. pravca BC uzima kao pozitivna ili negativna već prema tome da li su točke O i A s iste ili s različitih strana tog pravca.
(d) Ako se konveksan tetivni n -terokut na bilo koji način podijeli na $n - 2$ trokuta pomoću $n - 3$ dijagonala, koje se ne sijeku unutar tog poligona, pokažite da je zbroj polumjera upisanih kružnica tih trokuta stalan bez obzira na podjelu na trokute.
(Napomena: Ovaj zadatak vrijedi 50 bodova (ostali po 25), a pri rješavanju pojedinog dijela ovog zadatka dopušteno je koristiti ranije dijelove makar i ne bili riješeni.)
3. Na nekom turističkom putovanju bilo je ukupno 17 turista. Utvrđeno je da su bilo koja dvojica od njih bili međusobno "na ti" ili "na vi" ili uopće nisu razgovarali. Dokažite da među tih 17 ljudi postoje bar trojica koji su međusobno bili "na ti" ili bar trojica koji su međusobno bili "na vi" ili bar trojica koji međusobno nisu razgovarali.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

IV. razred

1. Zadan je trokut $A_0B_0C_0$ s kutovima $\alpha = 40^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ$. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina tog trokuta. Na isti način se polazeći od trokuta $A_1B_1C_1$ konstruira trokut $A_2B_2C_2$, zatim redom trokuti $A_3B_3C_3, \dots$. Dokažite da je trokut $A_{1995}B_{1995}C_{1995}$ sličan trokutu $A_0B_0C_0$.
2. Neka je n prirodan broj koji se može prikazati kao suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva na dva različita načina:
$$n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \quad a \neq c, \quad b \neq d.$$
Dokažite da je n složen broj.
3. Sve točke ravnine su na bilo koji način podijeljene na dva disjunktne skupa. Dokažite da postoji trokut čiji vrhovi pripadaju istom skupu, najmanja stranica mu ima duljinu 1 i kutovi mu se odnose kao $1 : 2 : 3$.
4. Zadan je niz $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da se svaki prirodni broj može prikazati kao zbroj različitih elemenata tog niza.