

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

I. razred

1. Dokažite da trokut čije su duljine stranica prosti brojevi ne može imati cjelobrojnu površinu.
2. Produkt pozitivnih realnih brojeva x , y i z jednak je 1. Ako je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z ,$$

dokažite da je

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k ,$$

za svaki prirodan broj k .

3. U jednakokrakom trokutu duljina osnovice je a , duljina kraka b , duljina visine na osnovicu v , pri čemu vrijedi: $\frac{a}{2} + v \geq b\sqrt{2}$. Odredite kutove trokuta. Kolika je površina trokuta ako je $b = 8\sqrt{2}$?
4. Koliko ima djelitelja broja 30^{2003} koji nisu djelitelji broja 20^{2000} ?

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

II. razred

1. Nađite sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(2x + 1)^2 + y^2 + (y - 2x)^2 = \frac{1}{3}.$$

2. Točka M je unutar kvadrata $ABCD$. Označimo s A_1, B_1, C_1, D_1 druge točke presjeka pravaca AM, BM, CM, DM , tim redom, s kružnicom opisanom kvadratu $ABCD$. Dokažite da je

$$|A_1B_1| \cdot |C_1D_1| = |A_1D_1| \cdot |B_1C_1|.$$

3. Za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$ označimo $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$. Dokažite nejednakost

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

4. Koliko najmanje brojeva može imati skup A prirodnih brojeva od kojih je najmanji jednak 1, najveći 100, i ima svojstvo da je svaki broj iz A , osim 1, jednak zbroju dva (jednaka ili različita) broja iz A ?

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

III. razred

1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$,
 $\gamma = \sphericalangle BCA$.

a) Ako je $\alpha = 3\beta$, dokažite da je $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$.

b) Da li vrijedi obrat? Obrazložite!

2. Dokažite jednakost

$$\left\lfloor \frac{n(n+1)}{4n-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor,$$

za svaki prirodan broj $n > 2$.

3. Svi bridni kutovi pri vrhu D tetraedra $ABCD$ jednaki su α , a kutovi između dviju strana tetraedra kojima je jedan vrh D jednaki su φ . Dokažite da postoji točno jedan kut α za koji je $\varphi = 2\alpha$.

4. Imamo 8 kockica duljine brida 1 čije su 24 strane obojene plavo, a preostalih 24 crveno. Dokažite da se od tih kockica može složiti kocka $(2 \times 2 \times 2)$ na čijem oplošju će biti jednak broj plavih i crvenih kvadrata (1×1) .

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

IV. razred

1. Neka je I točka na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ trokuta ABC , a M i N redom točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, takve da je $\sphericalangle ABI = \sphericalangle NIC$ i $\sphericalangle ACI = \sphericalangle MIB$.

Dokažite da je I središte upisane kružnice trokuta ABC ako i samo ako su točke M , N i I kolinearne.

2. Niz realnih brojeva $(a_n)_{n \geq 0}$ ima svojstvo da za sve $m \geq n \geq 0$ vrijedi

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}).$$

Odredite a_{2003} ako je $a_1 = 1$.

3. Prirodni brojevi od 1 do 2003 poredani su u niz. Na nizu vršimo ovu operaciju: ako je prvi broj u nizu jednak k , okrenemo poredak prvih k brojeva. Dokazati da se nakon konačno uzastopnih primjena ove operacije broj 1 pojavi na prvom mjestu, nezavisno od početnog rasporeda.

4. Dokažite da je

$$\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

djeljivo s p , za svaki prost broj p i svaki prirodan broj $n \geq p$.