HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 22. travnja 2017.

Zadatak 1.

Odredi najmanji realni broj C takav da je za sve pozitivne realne brojeve a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 moguće odabrati međusobno različite indekse i, j, k, l tako da vrijedi

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \leqslant C.$$

Rješenje.

Odgovor je $C = \frac{1}{2}$. Promotrimo brojeve $1, 2, 2, 2, n$, gdje je $n > 5$, svi razlomci koje možemo dobiti od tih brojeva su

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < \frac{n}{2} < n.$$

Najmanja dva razlomka ne možemo dobiti istovremeno (oba koriste broj n). Razlika bilo kojeg većeg od $\dfrac{1}{2}$ s bilo kojim drugim je barem $\dfrac{1}{2}$, pa je najmanja razlika koju možemo dobiti $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{n}$. To pokazuje da je $C \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{n}$ za svaki prirodni broj n, što povlači da je $C \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Neka su a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 proizvoljni pozitivni realni brojevi. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Brojevi

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}$$

se nalaze u intervalu $[0, 1]$. Ima ih pet pa se neka tri nalaze u jednom od intervala $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ili $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. No, to znači da se i neka dva uzastopna (pri čemu prvi i zadnji također smatramo uzastopnima) nalaze u tom intervalu. Brojevi u ta dva razlomka imaju različite indekse i razlomci su udaljeni za najviše $\frac{1}{2}$. Time dobivamo da je $C \leqslant \frac{1}{2}$ i dokaz je završen.

Zadatak 2.

Dokaži da je moguće svaki prirodni broj obojiti jednom od tri boje tako da sljedeća dva uvjeta budu zadovoljena:

i) Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, svi prirodni brojevi x takvi da je $2^n \leqslant x < 2^{n+1}$ su iste boje.

ii) Ne postoje prirodni brojevi x, y i z iste boje (osim $x = y = z = 2$) takvi da vrijedi $x + y = z^2$.

Rješenje.

Označimo s c_n boju kojom ćemo obojiti sve prirodne brojeve x takve da je $2^n \leqslant x < 2^{n+1}$. Boje c_n odredit ćemo induktivno. Za početak odaberimo c_0, c_1 i c_2 da budu tri različite boje. Nadalje, za svaki $n \geqslant 3$ neka je c_n boja koja nije jednaka niti $c_{\lfloor n/2 \rfloor}$ niti $c_{\lfloor n/2 \rfloor+1}$. Uočimo da je ovakva definicija smislena, budući da je $\lfloor n/2 \rfloor + 1 < n$ za svaki $n \geqslant 3$.

Iz same konstrukcije je jasno da ovakvo bojenje zadovoljava uvjet i), a sada ćemo dokazati da zadovoljava i uvjet ii). Neka su x, y i z prirodni brojevi obojeni istom bojom takvi da je $x + y = z^2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leqslant y$. Neka je n cijeli broj takav da je $2^n \leqslant y < 2^{n+1}$. Tada je očito

$$2^n < x + y < 2^{n+2},$$

pa je zato $2^{n/2} < z < 2^{(n+2)/2}$, pa onda i $2^{\lfloor n/2 \rfloor} < z < 2^{\lfloor n/2 \rfloor+2}$. Budući da su y i z obojeni istom bojom, iz konstrukcije slijedi da je $n \leqslant 2$. Odavde zaključujemo da je $x \leqslant y < 8$ i $z = 2$ ili 3. Kratkom provjerom ovih mogućnosti lako je vidjeti da mora biti $x = y = z = 2$.

Zadatak 3.

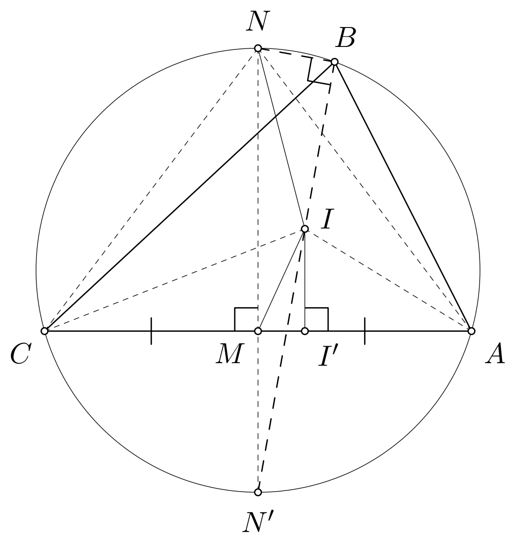
U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC|$. Točka I je središte kružnice upisane tom trokutu. Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$, a N polovište luka $\widehat{AC}$ opisane kružnice tog trokuta koji sadrži točku B. Dokaži da je

$$\sphericalangle IMA = \sphericalangle INB.$$

Prvo rješenje.

Neka je točka N' drugo sjecište kružnice opisane trokutu ABC i pravca BI. Ona je polovište luka $\widehat{CA}$ koji ne sadrži točku B, dijametralno je suprotna točki N te je $M \in \overline{NN'}$. Po Talesovom poučku je $\sphericalangle NBI = \sphericalangle NBN' = 90^\circ$ pa je tvrdnja zadatka ekvivalentna tvrdnji

$$\sphericalangle IMN' = \sphericalangle NIN'.$$



Da bismo dokazali jednakost tih kutova, dovoljno je dokazati da su trokuti IMN' i NIN' slični. Kako je kut kod vrha N' zajednički tim trokutima, dovoljno je dokazati

$$\frac{|IN'|}{|MN'|} = \frac{|NN'|}{|IN'|} \iff |IN'|^2 = |MN'| \cdot |NN'|.$$

Promotrimo sada trokut NAN'. Po Talesovom poučku on je pravokutan s pravim kutom kod vrha A. Po Euklidovom poučku (ili iz sličnosti trokuta NAN' i AMN') slijedi

$$|AN'|^2 = |MN'| \cdot |NN'|.$$

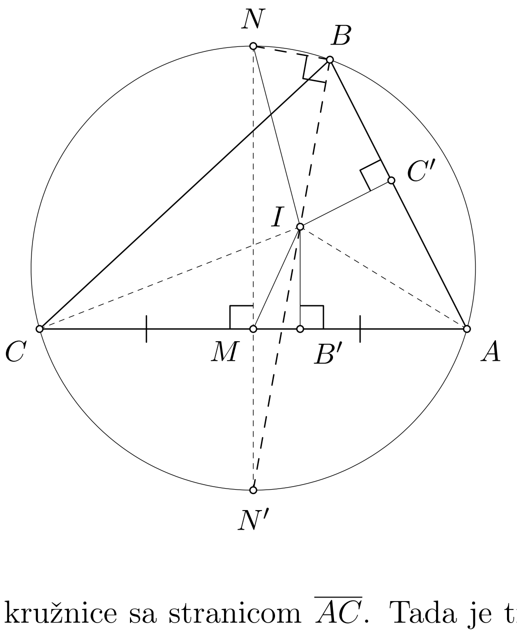
Kako vrijedi $\sphericalangle AIN' = \sphericalangle IAN' = \frac{\sphericalangle CAB}{2} + \frac{\sphericalangle ABC}{2}$, trokut AIN' je jednakokračan i vrijedi $|AN'| = |IN'|$. Odatle slijedi $|IN'|^2 = |AN'|^2 = |MN'| \cdot |NN'|$ pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Drugo rješenje.

Neka je $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, te neka su r i R redom polumjeri upisane i opisane kružnice trokuta ABC.

Neka je točka N' drugo sjecište kružnice opisane trokutu ABC i pravca BI. Ona je polovište luka $\widehat{CA}$ koji ne sadrži točku B, dijametralno je suprotna točki N te je $M \in \overline{NN'}$. Stoga je

$$\sphericalangle NBI = \sphericalangle NBN' = 90^\circ.$$



Neka je B' dirałište upisane kružnice sa stranicom $\overline{AC}$. Tada je trokut $B'MI$ također pravokutan. Dovoljno je pokazati da su trokuti BNI i $B'MI$ slični, odnosno da vrijedi

$$|BN| : |BI| = |B'M| : |B'I|.$$

Uočimo da je $|B'I| = r$ i

$$|B'M| = |AM| - |AB'| = \frac{b}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-c}{2} = R\sin\alpha - R\sin\gamma.$$

Ako je C' diralište upisane kružnice i stranice $\overline{AB}$, onda je

$$|BI| = \frac{|C'I|}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Uočimo da je $\sphericalangle BN'A = \sphericalangle BCA = \gamma$, te

$$\sphericalangle NN'A = \sphericalangle NCA = \sphericalangle CAN = \frac{180^\circ - \beta}{2}.$$

Slijedi da je $\sphericalangle NN'B = \dfrac{\alpha-\gamma}{2}$. Također, iz pravokutnog trokuta $NN'B$ dobivamo

$$|BN| = 2R\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Tvrdnja da je $|BN| : |BI| = |B'M| : |B'I|$ je ekvivalentna tvrdnji

$$\sin\alpha - \sin\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

No ta tvrdnja je poznati trigonometrijski identitet. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$5m^3 = 27n^4 - 2n^2 + n.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u obliku

$$5m^3 = n(27n^3 - 2n + 1)$$

te uočimo da su brojevi n i $27n^3 - 2n + 1$ relativno prosti. To znači da imamo samo dvije mogućnosti:

a) $n = 5a^3$ i $27n^3 - 2n + 1 = b^3$ za neke prirodne brojeve a i b.
   Nejednakost $(3n-1)^3 = 27n^3 - 27n^2 + 9n - 1 < 27n^3 - 2n + 1$ je ekvivalentna nejednakosti $27n^2 - 11n + 2 > 0$ koja je ispunjena za sve prirodne brojeve n. Vrijedi i $27n^3 - 2n + 1 < 27n^3 - 2 + 1 < 27n^3 = (3n)^3$.
   Dakle, imamo $(3n-1)^3 < 27n^3 - 2n + 1 < (3n)^3$ pa dolazimo do kontradikcije.

b) $n = a^3$ i $27n^3 - 2n + 1 = 5b^3$ za neke prirodne brojeve a i b.
   Promatrajući drugu jednadžbu odmah primjećujemo da n ne može biti djeljiv s 5. Ako je $n \equiv \pm 1 \pmod 5$, vrijedi $27n^3 - 2n + 1 \equiv 1 \pmod 5$. Ako je $n \equiv 2 \pmod 5$, vrijedi $27n^3 - 2n + 1 \equiv 3 \pmod 5$, a ako je $n \equiv 3 \pmod 5$, vrijedi $27n^3 - 2n + 1 \equiv 4 \pmod 5$.
   Vidimo da u svim slučajevima lijeva strana jednadžbe ne može biti djeljiva s 5.

Zaključujemo da dana jednadžba nema rješenja.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 23. travnja 2017.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy).$$

Rješenje.

Označimo s $P(x, y)$ jednakost $xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy)$.

Jednakost $P(x, 1)$ glasi $xf(x) - f(1) = (x - 1)(f(x + 1) - x)$, odakle je

$$xf(x) - (x - 1)f(x + 1) = f(1) - x(x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

S druge strane, $P(x+1, -1)$ glasi $(x+1)f(x+1) + f(-1) = (x+2)(f(x) + x+1)$, odakle slijedi

$$(x + 2)f(x) - (x + 1)f(x + 1) = f(-1) - (x + 1)(x + 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Jednakosti (1) i (2) čine sustav dviju linearnih jednadžbi s nepoznanicama $f(x)$ i $f(x + 1)$, te eliminiranjem $f(x + 1)$ dobivamo

$$f(x) = x^2 + \frac{f(1) - f(-1)}{2}x + (f(1) + f(-1) - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvođenjem oznaka $b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$ i $c = f(1)+f(-1)-1$ dobivamo $f(x) = x^2+bx+c, \forall x \in \mathbb{R}$, pri čemu su $b, c \in \mathbb{R}$. Direktno provjerom vidimo da je svaka funkcija ovog oblika zaista rješenje.

Zadatak 2.

U jednoj organizaciji postoje tri odbora. Svaka osoba pripada točno jednom odboru. Za svake dvije osobe koje pripadaju različitim odborima, u preostalom odboru postoji točno 10 osoba koje te dvije osobe obje poznaju, te točno 10 osoba koje nijedna od te dvije osobe ne poznaje. Poznanstva su uzajamna. Koliko je ukupno osoba u sva tri odbora zajedno?

Prvo rješenje.

Neka su odbori A, B, C i neka je u njima, redom, a, b, c osoba. Zamislimo osobe kao točke u ravnini takve da nikoje 3 nisu kolinearne. Svake dvije osobe koje se poznaju povežimo plavom, a svake dvije koja se ne poznaju crvenom dužinom. Pri tome, osobe koje su u istom odboru nikako ne povezujemo.

Najprije, prebrojimo jednobojne trokute (one čije su sve tri stranice iste boje). Za svaki par osoba $x \in A$, $y \in B$ postoji točno 10 jednobojnih trokuta. Naime, prema uvjetu zadatka, ako je $\overline{xy}$ plava dužina, onda postoji točno 10 točaka $z \in C$ takvih da su dužine $\overline{xz}$ i $\overline{yz}$ plave, te analogno vrijedi za crvene dužine. Dakle, broj jednobojnih trokuta je $10ab$. No, na isti način dobijemo da je broj jednobojnih trokuta jednak $10bc$ i $10ca$, a iz ovog zaključujemo da je $a = b = c$.

Broj svih trokuta je a^3, a broj jednobojnih trokuta je $10a^2$. Preostaje još prebrojiti dvobojne trokute. Za svaki par $x \in A$, $y \in B$ dobijemo točno 10 dvobojnih trokuta takvih da su dužine $\overline{xz}$ i $\overline{yz}$ iste boje, tj. imamo $10a^2$ takvih, onih gdje su dužine $\overline{yx}$ i $\overline{zx}$ iste boje također $10a^2$, te onih gdje su $\overline{xy}$ i $\overline{zy}$ iste boje opet $10a^2$. Dakle, dvobojnih trokuta imamo $30a^2$.

Konačno, vrijedi $a^3 = 10a^2 + 30a^2$ pa je $a = 40$, što znači da imamo ukupno 120 osoba u sva tri odbora zajedno.

Drugo rješenje.

Neka su odbori A, B, C i neka je u njima, redom, a, b, c osoba.

Neka je x proizvoljna osoba u odboru A, a y proizvoljna osoba u odboru B. Neka je $C(x)$ (tj. $C(y)$) podskup odbora C koji se sastoji od osoba koje osoba x (tj. osoba y) poznaje.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $|C(x) \cap C(y)| = 10$ i $|C| - |C(x) \cup C(y)| = 10$, pa je

$$|C(x)| + |C(y)| = |C(x) \cup C(y)| - |C(x) \cap C(y)| = |C| - 10 + 10 = c.$$

Ako je x' bilo koja osoba druga osoba iz odbora A, onda na isti način zaključujemo da vrijedi $|C(x')| + |C(y)| = c$, iz čega slijedi $|C(x)| = |C(x')|$. Dakle, sve osobe iz odbora A poznaju jednak broj osoba u odboru C. Taj broj označimo d_{AC}, te analogno uvodimo slične oznake za ostale parove odbora. Uočimo li da zaključke možemo izvesti analogno za odbore A i B, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} d_{BA} + d_{CA} &= a, \\ d_{CB} + d_{AB} &= b, \\ d_{AC} + d_{BC} &= c. \end{aligned}$$

Prebrojimo na dva načina ukupan broj poznanstava između osoba iz odbora A i B. Osobu iz odbora A možemo odabrati na a načina, a onda osobu iz odbora B koju već odabrana osoba iz skupa A poznaje na d_{AB} načina, pa je taj broj jednak $a \cdot d_{AB}$. Analogno, taj broj je jednak $b \cdot d_{BA}$, tj. vrijedi

$$a \cdot d_{AB} = b \cdot d_{BA}.$$

Gornji sustav možemo pisati kao

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot d_{AB} + d_{CA} &= a, \\
\frac{b}{c} \cdot d_{BC} + d_{AB} &= b, \\
\frac{c}{a} \cdot d_{CA} + d_{BC} &= c.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo

$$d_{CA} = \frac{1}{2}a, \quad d_{AB} = \frac{1}{2}b, \quad d_{BC} = \frac{1}{2}c.$$

Konačno, prebrojimo na dva načina broj trojki (x, y, z) pri čemu je $x \in A$, $y \in B$ i $z \in C$, te x poznaje y i z. Dobivamo

$$a \cdot d_{AB} \cdot d_{AC} = b \cdot c \cdot 10.$$

Uvrstimo li $d_{AB} = \frac{1}{2}b$, $d_{AC} = \frac{1}{2}c$, slijedi $a = 40$.

Potpuno analogno bismo pokazali $b = 40$ i $c = 40$, pa je traženi broj 120.

Zadatak 3.

Točka M se nalazi u unutrašnjosti trokuta ABC. Pravac AM siječe kružnicu opisanu trokutu MBC još jednom u točki D, pravac BM kružnicu opisanu trokutu MCA još jednom u točki E, a pravac CM kružnicu opisanu trokutu MAB još jednom u točki F. Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AD|}{|MD|} + \frac{|BE|}{|ME|} + \frac{|CF|}{|MF|} \geqslant \frac{9}{2}.$$

Prvo rješenje.

S obzirom na to da je

$$\begin{aligned}
\frac{|AD|}{|MD|} + \frac{|BE|}{|ME|} + \frac{|CF|}{|MF|} &= \frac{|AM| + |MD|}{|MD|} + \frac{|BM| + |ME|}{|ME|} + \frac{|CM| + |MF|}{|MF|} \\
&= 3 + \frac{|AM|}{|MD|} + \frac{|BM|}{|ME|} + \frac{|CM|}{|MF|},
\end{aligned}$$

dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{|AM|}{|MD|} + \frac{|BM|}{|ME|} + \frac{|CM|}{|MF|} \geqslant \frac{3}{2}.$$

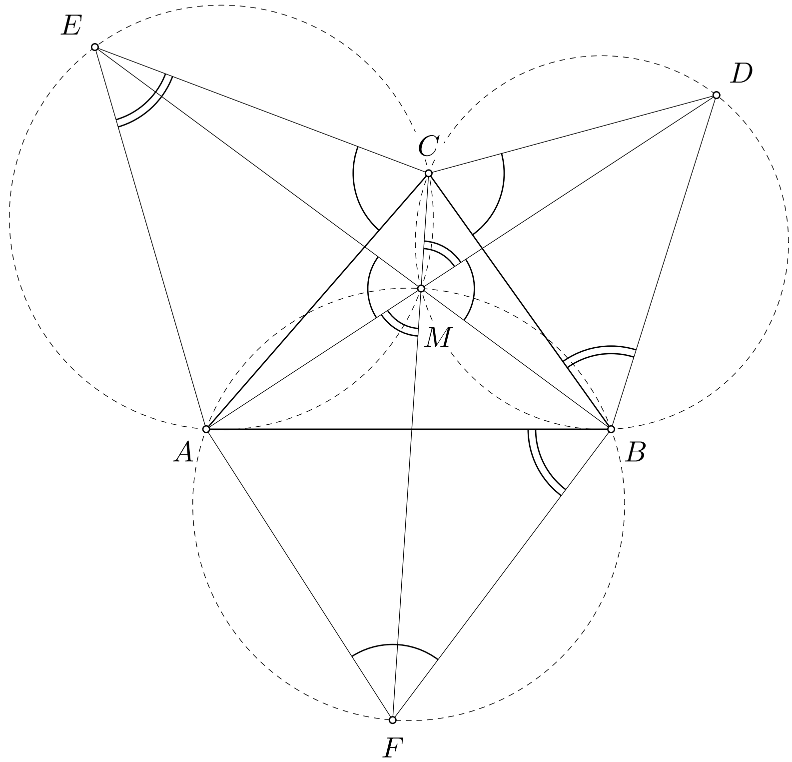
Četverokuti $MBDC$ i $MCEA$ su tetivni, pa vrijedi

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BMD = \sphericalangle EMA = \sphericalangle ECA.$$

Također vrijedi

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DMC = 180^\circ - \sphericalangle CMA = \sphericalangle CEA.$$

Prema K–K–K poučku zaključujemo da su trokuti BDC i EAC slični. Analogno dokazujemo da je i trokut BAF sličan tim trokutima.



Primjenom Ptolomejevog poučka u četverokutima $MBDC$, $MCEA$ i $MAFB$, uz korištenje omjera iz sličnosti trokuta BDC, EAC i BAF, dobivamo:

$$\begin{aligned}
|MD| &= |BM| \cdot \frac{|CD|}{|BC|} + |CM| \cdot \frac{|DB|}{|BC|}, \\
|ME| &= |CM| \cdot \frac{|AE|}{|CA|} + |AM| \cdot \frac{|EC|}{|CA|} = |CM| \cdot \frac{|DB|}{|CD|} + |AM| \cdot \frac{|BC|}{|CD|}, \\
|MF| &= |AM| \cdot \frac{|BF|}{|AB|} + |BM| \cdot \frac{|FA|}{|AB|} = |AM| \cdot \frac{|BC|}{|DB|} + |BM| \cdot \frac{|CD|}{|DB|},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $\dfrac{|AM|}{|MD|} + \dfrac{|BM|}{|ME|} + \dfrac{|CM|}{|MF|}$ jednako

$$\frac{|AM| \cdot |BC|}{|BM| \cdot |CD| + |CM| \cdot |DB|} + \frac{|BM| \cdot |CD|}{|CM| \cdot |DB| + |AM| \cdot |BC|} + \frac{|CM| \cdot |DB|}{|AM| \cdot |BC| + |BM| \cdot |CD|}.$$

Dakle, uz oznake $x = |AM| \cdot |BC|$, $y = |BM| \cdot |CD|$, $z = |CM| \cdot |DB|$, potrebno je dokazati nejednakost

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

To je Nesbittova nejednakost, za koju je poznato da vrijedi, pa je time dokaz gotov.

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$\frac{|AD|}{|MD|}+\frac{|BE|}{|ME|}+\frac{|CF|}{|MF|}=\left(\frac{|AM|}{|MD|}+1\right)+\left(\frac{|BM|}{|ME|}+1\right)+\left(\frac{|CM|}{|MF|}+1\right),$$

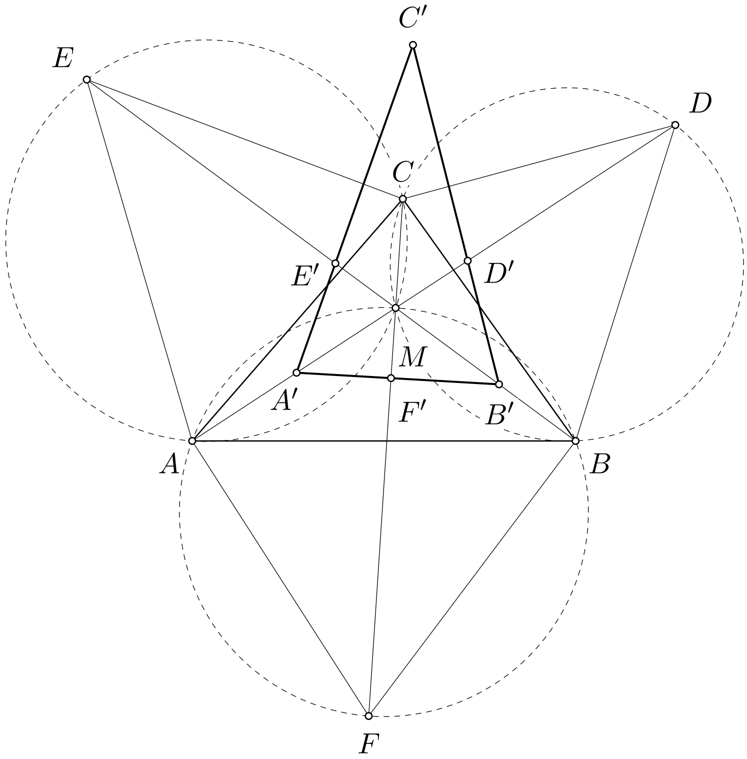
pa je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{|AM|}{|MD|}+\frac{|BM|}{|ME|}+\frac{|CM|}{|MF|}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Primijenimo inverziju u odnosu na kružnicu $k(M,r)$ gdje je r bilo koji pozitivan realan broj. Sliku točke T obzirom na tu inverziju označimo s T'.

Uočimo da se pravac AD preslikava na sebe, a to znači da su točke A', D' i M kolinearne. Isto vrijedi i za točke B', E' i M kao i za točke C', F' i M.

Kružnice opisane četverokutima $MBDC$, $MCEA$ i $MAFB$ preslikavaju se u pravce, pa su i trojke točaka B', C', D', odnosno C', A', E' odnosno A', B', F' kolinearne.



Dakle, nakon primjene inverzije imamo trokut $A'B'C'$, točku M unutar njega i točke D', E', F' redom na stranicama $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ tako da se pravci $A'D'$, $B'E'$ i $C'F'$ sijeku u M.

Za bilo koju točku T i njenu sliku T' vrijedi $|MT|\cdot|MT'|=r^2$, odnosno $|MT|=\dfrac{r^2}{|MT'|}$.

Zato je

$$\frac{|MA|}{|MD|}=\frac{r^2/|MA'|}{r^2/|MD'|}=\frac{|MD'|}{|MA'|}$$

i analogno $\dfrac{|MB|}{|ME|} = \dfrac{|ME'|}{|MB'|}$, $\dfrac{|MC|}{|MF|} = \dfrac{|MF'|}{|MC'|}$.

Preostaje dokazati da vrijedi

$$\frac{|MD'|}{|MA'|} + \frac{|ME'|}{|MB'|} + \frac{|MF'|}{|MC'|} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Označimo $a = P(B'C'M)$, $b = P(C'A'M)$, $c = P(A'B'M)$. Vrijedi

$$\frac{|MD'|}{|MA'|} = \frac{P(B'C'M)}{P(C'A'B'M)} = \frac{a}{b+c}$$

te analogno $\dfrac{|ME'|}{|MB'|} = \dfrac{b}{c+a}$ i $\dfrac{|MF'|}{|MC'|} = \dfrac{c}{a+b}$.

Zato je dovoljno dokazati da za $a, b, c > 0$ vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},$$

no to je poznata Nesbittova nejednakost.

Zadatak 4.

Za prirodni broj n neka $\tau(n)$ označava broj prirodnih djelitelja broja n te neka $\tau_1(n)$ označava broj prirodnih djelitelja broja n koji daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. Odredi sve moguće cjelobrojne vrijednosti razlomka

$$\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)}.$$

Rješenje.

Neka je $n = 3^a \cdot b \cdot m$, gdje je a nenegativan cijeli broj, a b i m prirodni brojevi (moguće i 1) takvi da svi prosti faktori od b daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a oni od m ostatak 2.

Tada je $\tau(10n) = (a+1) \cdot \tau(b) \cdot \tau(10m)$.

Za $\tau_1(n)$, prost faktor 3 ne smijemo uzeti, proste faktore iz b možemo uzeti po volji, a jedini uvjet na one iz m je da ih moramo uzeti parno mnogo. Dakle, $\tau_1(10n) = \tau(b) \cdot \tau_1(10m)$. Stoga je

$$\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)} = (a+1) \cdot \frac{\tau(10m)}{\tau_1(10m)}.$$

Neka je $m = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2} \cdot p_3^{c_3} \cdots p_k^{c_k}$, tada je $\tau(10m) = (c_1+2)(c_2+2)(c_3+1)\cdots(c_k+1)$. Promotrimo dva slučaja.

- Broj $\tau(10m)$ je paran. Tada je neka od zagrada (u raspisu od $\tau(10m)$) parna. Neka je to zagrada koja pripada faktoru p_j i neka je ona jednaka $2t$. Odaberemo li svaki prost faktor (osim p_j) na proizvoljan način, onda vidimo da broj pojavljivanja p_j možemo odabrati na točno t načina. Dakle, u ovom slučaju je $\tau_1(10m) = \frac{1}{2}\tau(10m)$. Zadani razlomak u ovom slučaju može postići vrijednosti oblika $2(a+1)$, tj. bilo koji parni prirodni broj je moguća vrijednost i nema drugih mogućnosti u ovom slučaju.

- Broj $\tau(10m)$ je neparan. Sve zagrade su neparne, što znači da ja eksponent svakog prostog faktora paran. Za svaku kombinaciju eksponenata čiji zbroj je paran (tj. koji daju djelitelj s ostatkom 1 pri dijeljenju s 3) prvi eksponent koja nije 0 smanjimo za jedan, a za svaku koja daje neparan zbroj zadnji eksponent koji nije 0 (ili prvi ako dođemo do kraja) povećamo za 1. Na taj način su sve kombinacije s neparnim zbrojem u bijektivnoj vezi sa svim kombinacijama s parnim zbrojem (osim one kad su svi eksponenti 0). To znači da vrijedi $\tau_1(10m) = \frac{1}{2}(\tau(10m)+1)$. Neka je $\tau(10m) = t$. Dakle, u ovom slučaju je

$$\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)} = 2(a+1) \cdot \frac{t}{t+1}.$$

Budući da nas zanimaju samo cjelobrojne vrijednosti razlomka, vidimo da $t+1$ dijeli $2(a+1)$, pa je gornji razlomak oblika tt', gdje je t' neki prirodan broj. Kako su u t sve zagrade neparne vidimo da su prve dvije jednake barem 3 pa je broj t složen. Stoga, zadani razlomak ne može biti neparan prost broj.

Preostaje pokazati da zadani razlomak može poprimiti vrijednost xy, gdje su x i y neparni prirodni brojevi veći od 1. To postižemo za

$$n = 3^{\frac{xy-1}{2}} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{y-2}.$$

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 6. svibnja 2017.

Zadatak 1.

Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Rješenje.

Zbog jednostavnosti neka je $A=a^2+b^2+c^2$ i $B=ab+bc+ca$. Primjenom CSB nejednakosti dobijemo

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))\geqslant(a+b+c)^2,$$

tj.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{A+2B}{2B}=\frac{A}{2B}+1.$$

Dakle, vrijedi da je

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{A}{2B}+1+\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Konačno, iz A–G nejednakosti slijedi

$$\frac{A}{2B}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{AB}{8BA}}=\frac{3}{2},$$

iz čega slijedi tražena nejednakost.

Zadatak 2.

U nekom arhipelagu nalazi se 2017 otoka nazvanih $1,2,\ldots,2017$. Dvije agencije, Crveni zmaj i Plavo oko, dogovaraju se oko rasporeda brodskih linija između pojedinih otoka. Za svaki par otoka, točno jedna agencija će organizirati brodsku liniju i to samo u smjeru od otoka nazvanog manjim brojem do otoka nazvanog većim brojem.

Raspored brodskih linija je *dobar* ako ne postoje dva otoka s oznakama $A<B$ takva da je s otoka A na otok B moguće doći koristeći samo brodove Crvenog zmaja, a također i koristeći samo brodove Plavog oka.

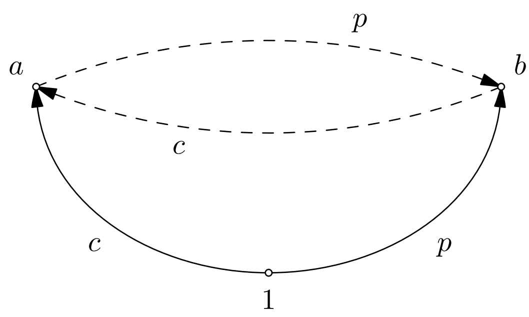
Odredi ukupan broj dobrih rasporeda brodskih linija.

Prvo rješenje.

Brodske linije koje organizira agencija Crveni zmaj ćemo zvati crvenim, a one koje organizira Plavo oko plavim linijama.

Neka je a_n ukupan broj dobrih rasporeda brodskih linija za arhipelag s n otoka. Promotrimo arhipelag s $n+1$ otokom te uočimo otok 1. Neka je A skup svih otoka do kojih iz 1 vozi crvena, a B skup svih otoka do kojih iz 1 vozi plava linija.

Primijetimo da sve linije (ako postoje) od nekog otoka u A prema nekom otoku u B moraju biti plave. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje otoci $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $a < b$ i da je linija $a \to b$ crvena. Linija $1 \to b$ je plava, a linije $1 \to a$ i $a \to b$ su crvene, što znači da je od a do b moguće doći koristeći samo crvene linije, ali i koristeći samo plave linije, što je kontradikcija. Na isti način zaključujemo da sve (eventualne) linije od nekog otoka u B prema nekom otoku u A moraju biti crvene.



Neka se u skupu A nalazi $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ otoka. Tada ih u skupu B ima $n-k$. Primijetimo da otoci u skupu A moraju tvoriti arhipelag u kojemu je raspored brodskih linija dobar, te isto vrijedi za otoke u skupu B. Također, za svaki odabir arhipelaga A i B s dobrim rasporedom linija dobivamo točno jedan arhipelag s $n+1$ otokom u kojemu je raspored brodskih linija dobar.

Matematičkom indukcijom po broju otoka dokazujemo da je $a_n = n!$. Očito je $a_0 = a_1 = 1$. Pretpostavimo da je $a_k = k!$, za sve $k \leqslant n$. Prema gornjem razmatranju imamo da je

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!.$$

Time je tvrdnja dokazana. Dakle, $a_{2017} = 2017!$.

Drugo rješenje.

Neka je $\mathcal{C}$ skup svih dobrih rasporeda brodskih linija te neka je S skup svih permutacija brojeva iz skupa $N = \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Brodske linije koje organizira agencija Crveni zmaj ćemo zvati crvenim, a one koje organizira Plavo oko plavim linijama.

Elementi od S su uređene 2017-torke brojeva $1, 2, \ldots, 2017$ (svaki se pojavljuje točno jednom). Svaki element $\sigma \in S$ određuje linearni uređaj $\prec_\sigma$ na skupu N. Naime, za $i, j \in N$ kažemo da je $i \prec_\sigma j$ ako se i nalazi prije j u uređenoj 2017-torki σ.

Pokažimo sada da postoji bijekcija među skupovima $\mathcal{C}$ i S. Zamislimo naš arhipelag kao usmjereni graf, otoci su vrhovi, a linije su usmjereni bridovi. Svaku crvenu liniju okrenimo u suprotnom smjeru i sada u našem grafu promatrajmo samo usmjerenost (zanemarimo boje). U ovakvom grafu, za $i \neq j$, kažemo da je $i \prec j$ ako postoji usmjereni brid $i \to j$. Kako je raspored linija dobar nemoguće je dobiti da je $i \prec j$ i $j \prec i$. Stoga smo dobili neki linearni uređaj brojeva iz N, tj. postoji neki $\sigma \in S$ takav da je $\prec = \prec_\sigma$. Obratno, za svaki $\sigma \in S$ nacrtajmo usmjereni brid $i \to j$ ako je $i \prec_\sigma j$ te ako je $i < j$ onda je ta linija plava, a ako je $i > j$ onda je linija crvena. Ovime smo konstruirali bijekciju između $\mathcal{C}$ i S.

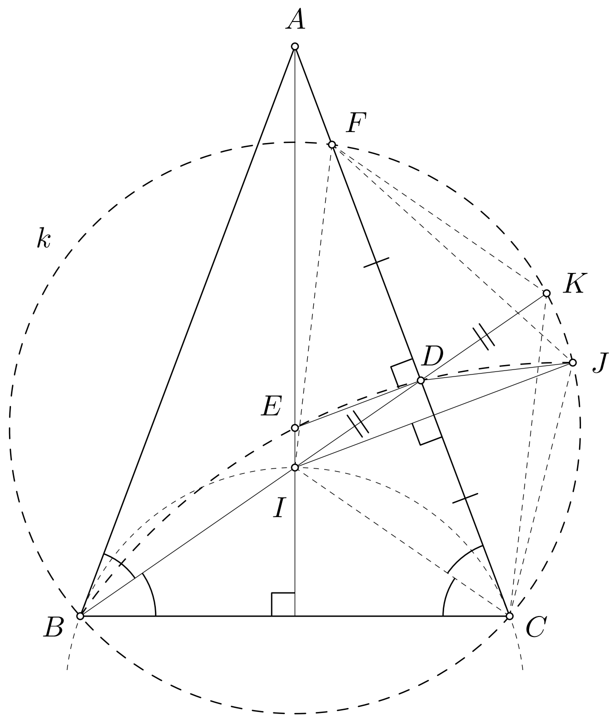
Konačno, dobrih rasporeda brodskih linija ima isto kao i elemenata skupa S, a to je $2017!$.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut takav da je $|AB| = |AC| > |BC|$ i neka je I središte tom trokutu upisane kružnice. Pravac BI siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D, a pravac točkom D okomit na AC siječe pravac AI u točki E. Dokaži da se točka J, osnosimetrična točki I u odnosu na pravac AC, nalazi na opisanoj kružnici trokuta BDE.

Prvo rješenje.

Neka kružnica k sa središtem E prolazi točkama B i C. Budući da su pravci ED i AC okomiti, točka F simetrična točki C obzirom na D leži na k.



Zbog $\sphericalangle DCI = \sphericalangle ICB = \sphericalangle CBI$ pravac DC je tangenta na kružnicu opisanu trokutu IBC. Neka je točka K simetrična točki I obzirom na D. Primjenom poučka o potenciji točke slijedi

$$|DC| \cdot |DF| = |DC|^2 = |DI| \cdot |DB| = |DK| \cdot |DB|,$$

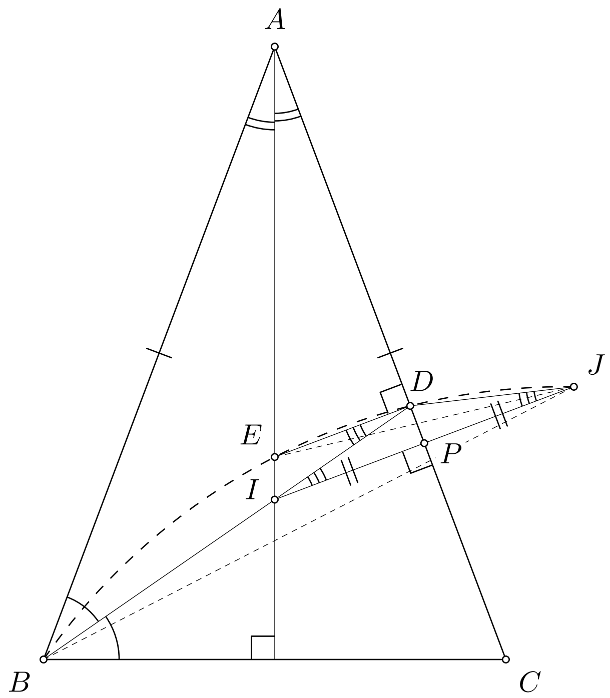
pa zaključujemo da točka K također leži na kružnici k. Dijagonale četverokuta $CKFI$ se raspolavljuju pa je taj četverokut paralelogram.

Zbog $\sphericalangle FJC = \sphericalangle CIF = \sphericalangle FKC$ zaključujemo da J leži na kružnici k. Dakle, $|EJ| = |EB|$.

Uočimo da je pravac AC simetrala unutarnjeg kuta $\sphericalangle BDJ$. Budući da su pravci DE i AC okomiti, zaključujemo da je DE simetrala vanjskog kuta $\sphericalangle BDJ$. Dakle, E je presjek simetrale dužine $\overline{BJ}$ i simetrale vanjskog kuta $\sphericalangle BDJ$, pa leži na kružnici opisanoj trokutu BDJ.

Drugo rješenje.

Neka je $P \in \overline{CA}$ polovište dužine $\overline{IJ}$, te $a = |BC|$ i $b = |AB| = |AC|$.



Budući da je $ED \parallel IJ$, vrijedi $\varphi := \sphericalangle EDB = \sphericalangle EDI = \sphericalangle JID$, a zbog simetrije imamo i $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DJI$.

S obzirom na:

$$\begin{aligned} & \text{četverokut } EBJD \text{ je tetivan} \\ \iff & \sphericalangle EDB = \sphericalangle EJB = \sphericalangle EJI + \sphericalangle IJB = (\sphericalangle DJI - \sphericalangle DJE) + \sphericalangle IJB \\ \iff & \sphericalangle DJE = \sphericalangle IJB, \end{aligned}$$

a zbog simetrije vrijedi $\sphericalangle EDJ = 180^\circ - \varphi = \sphericalangle BIJ$, dovoljno je pokazati da su trokuti EJD i BJI spiralno slični, tj. da je $|ED| : |DJ| = |BI| : |IJ|$, odnosno $|ED| \cdot 2|IP| = |BI| \cdot |DJ| = |BI| \cdot |DI|$.

Iz sličnosti pravokutnih trokuta AED i AIP uz primjenu poučka o simetrali kuta imamo:

$$\frac{|ED|}{|IP|} = \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{\frac{|AB|}{|AB|+|BC|} \cdot |AC|}{\frac{|AB|+|BC|+|CA|}{2} - |BC|} = \frac{\frac{b^2}{a+b}}{\frac{a+2b}{2} - a},$$

odakle je

$$|ED| \cdot 2|IP| = \frac{4b^2}{(a+b)(2b-a)} \cdot |IP|^2.$$

Primjenom Heronove formule za površinu trokuta ABC dobivamo $|IP|^2 = \frac{a^2(2b-a)}{4(a+2b)}$ te je

$$|ED| \cdot 2|IP| = \frac{a^2 b^2}{(a+b)(a+2b)}.$$

S druge strane, primjenom poučka o simetrali kuta u trokutu ABD dobivamo:

$$
\begin{aligned}
|BI| &= \frac{|BA|}{|BA|+|AD|} \cdot |BD| = \frac{b}{b+\frac{b^2}{a+b}} \cdot |BD| = \frac{a+b}{a+2b} \cdot |BD|, \\
|DI| &= |BD| - |BI| = \frac{b}{a+2b} \cdot |BD|,
\end{aligned}
$$

pa je

$$
|BI| \cdot |DI| = \frac{b(a+b)}{(a+2b)^2} \cdot |BD|^2.
$$

Budući da je

$$
|BD|^2 = |BC| \cdot |BA| - |CD| \cdot |AD| = ab - \frac{a}{a+b}b \cdot \frac{b}{a+b}b = \frac{a^2b(a+2b)}{(a+b)^2},
$$

slijedi

$$
|BI| \cdot |DI| = \frac{a^2b^2}{(a+b)(a+2b)},
$$

čime je dokaz završen.

Zadatak 4.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve a i b vrijedi

$$
f(a) + f(b) - ab \mid af(a) + bf(b).
$$

Rješenje.

Za $a = b = 1$ imamo da $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$, kako su brojevi $2f(1) - 1$ i $2f(1)$ relativno prosti zaključujemo da mora biti $2f(1) - 1 = 1$ pa je $f(1) = 1$.

Uvrstimo $b = 1$ u uvjet zadatka pa dobivamo da $f(a) - a + 1 \mid af(a) + 1$, za svaki $a \in \mathbb{N}$. Kako je $af(a) + 1 = a(f(a) - a + 1) + a^2 - a + 1$ vidimo da

$$
f(a) - a + 1 \mid a^2 - a + 1, \quad \forall a \in \mathbb{N}. \tag{$*$}
$$

Uvrstimo li da je $b = a$ u uvjet imamo da $2f(a) - a^2 \mid 2af(a) = a(2f(a) - a^2) + a^3$, tj.

$$
2f(a) - a^2 \mid a^3, \quad \forall a \in \mathbb{N}. \tag{$**$}
$$

Neka je p prost broj, iz $(*)$ imamo da $f(p)-p+1 \mid p^2-p+1$. Pretpostavimo da je $f(p)-p+1 \neq p^2 - p + 1$, kako je $p^2 - p + 1$ neparan prirodan broj vidimo da je $p^2 - p + 1 \geqslant 3|f(p) - p + 1|$ pa je

$$
f(p) \leqslant \frac{1}{3}(p^2 + 2p - 2).
$$

Koristeći $(**)$ vidimo da $2f(p) - p^2 \mid p^3$, znamo da je $f(p) \in \mathbb{N}$ pa je

$$
-p^2 < 2f(p) - p^2 \leqslant \frac{2}{3}(p^2 + 2p - 2) - p^2 = \frac{1}{3}(4p - p^2 - 4) = -p - \frac{1}{3}(p^2 + 4 - 7p).
$$

Za $p \geqslant 7$ je $p^2 + 4 - 7p > 0$ pa je $-p^2 < 2f(p) - p^2 < -p$, tj. nemoguće je da $2f(p) - p^2 \mid p^3$. Dakle, za prost broj $p \geqslant 7$ je nemoguće da je $f(p) - p + 1 \neq p^2 - p + 1$, stoga je $f(p) = p^2$, za sve proste brojeve $p \geqslant 7$.

Fiksirajmo prirodan broj a te neka je $b = p \geqslant 7$ proizvoljan prost broj, uvrstimo li to u uvjet zadatka imamo da

$$f(a) + p^2 - pa \mid af(a) + p^3 = a(f(a) + p^2 - pa) + p^3 - p^2a + pa^2,$$

tj.

$$f(a) + p^2 - pa \mid p(p^2 - pa + a^2).$$

Kako je a te time i $f(a)$ fiksan prirodan broj vidimo da su za dovoljno velike proste brojeve p brojevi $f(a) + p^2 - pa$ i p relativno prosti ($p \nmid f(a)$), stoga za dovoljno velike proste brojeve p vrijedi

$$f(a) + p^2 - pa \mid p^2 - pa + a^2 = (f(a) + p^2 - pa) + a^2 - f(a),$$

odnosno

$$f(a) + p^2 - pa \mid a^2 - f(a).$$

Konačno, kako je p proizvoljan (dovoljno velik) prost broj vidimo da je broj $f(a) + p^2 - pa$ proizvoljno velik pa mora biti $a^2 - f(a) = 0$, odnosno $f(a) = a^2$, za svaki $a \in \mathbb{N}$.

Za takvu funkciju f vidimo da je $f(a) + f(b) - ab = a^2 - ab + b^2$ i $af(a) + bf(b) = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, tj. ona zadovoljava uvjet zadatka. Dakle, funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a) = a^2$ je jedino rješenje.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 6. svibnja 2017.

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{3}{2} < \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < 9.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da je

$$\frac{1}{4} = \frac{4a+b}{4(4a+b)} < \frac{4a+b}{a+4b} < \frac{4(a+4b)}{a+4b} = 4,$$

analogno dobivamo

$$\frac{1}{4} < \frac{4b+c}{b+4c} < 4,$$
$$\frac{1}{4} < \frac{4c+a}{c+4a} < 4.$$

Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $a \leqslant b \leqslant c$. Vidimo da je

$$\frac{4c+a}{c+4a} = \frac{c+3c+a}{c+4a} \geqslant \frac{c+4a}{c+4a} = 1$$

i

$$\frac{4a+b}{a+4b} = \frac{a+3a+b}{a+4b} \leqslant \frac{a+4b}{a+4b} = 1.$$

Konačno je

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 < \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < 1+4+4 = 9.$$

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključimo da je

$$\frac{1}{4} < \frac{4a+b}{a+4b} < 4,$$
$$\frac{1}{4} < \frac{4b+c}{b+4c} < 4,$$
$$\frac{1}{4} < \frac{4c+a}{c+4a} < 4.$$

Pretpostavimo da je $\dfrac{4a+b}{a+4b} > 1$, $\dfrac{4b+c}{b+4c} > 1$ i $\dfrac{4c+a}{c+4a} > 1$, tj.

$$4a+b > a+4b,$$
$$4b+c > b+4c,$$
$$4c+a > c+4a.$$

Zbrajajući dobijemo da je $5a + 5b + 5c > 5a + 5b + 5c$, što je kontradikcija.

Dakle, barem jedan od brojeva

$$\frac{4a+b}{a+4b}, \quad \frac{4b+c}{b+4c}, \quad \frac{4c+a}{c+4a}$$

je manji od ili jednak 1. Analogno zaključimo da je barem jedan od tih brojeva veći od 1.

Kao i u prvom rješenju opet dobivamo

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 < \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < 1 + 4 + 4 = 9.$$

Zadatak 2.

Ludi lovac je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su *dijagonalno susjedna* ako imaju točno jedan zajednički vrh.

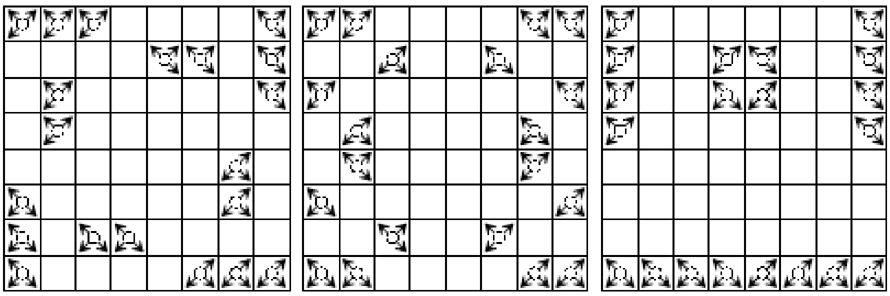
Odredi najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

Rješenje.

Figuru ludog lovca možemo zamisliti kao točku iz koje izviru 3 strelice, one određuju polja koja ludi lovac napada. *Dijagonalom* smatramo sve dijagonale na igraćoj ploči, a ne samo one glavne. Također, 4 polja u uglovima također smatramo dijagonalama (koje se sastoje od samo tog jednog polja).

Na svakoj dijagonali imamo dva moguća smjera kretanja. Primijetimo da ne smijemo imati više od jedne strelice koje pokazuju u istom smjeru jer tada jedna od te dvije pokazuje u drugu, tj. jedan ludi lovac je napadnut. Dakle, na svakoj dijagonali možemo imati najviše 2 strelice. Broj dijagonala je 30, što znači da možemo imati najviše 60 strelica. Kako svaki ludi lovac pridonosi s 3 strelice, zaključujemo da je $N \leqslant 20$.

Na slici je dan primjer koji pokazuje da je moguće postaviti 20 ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.



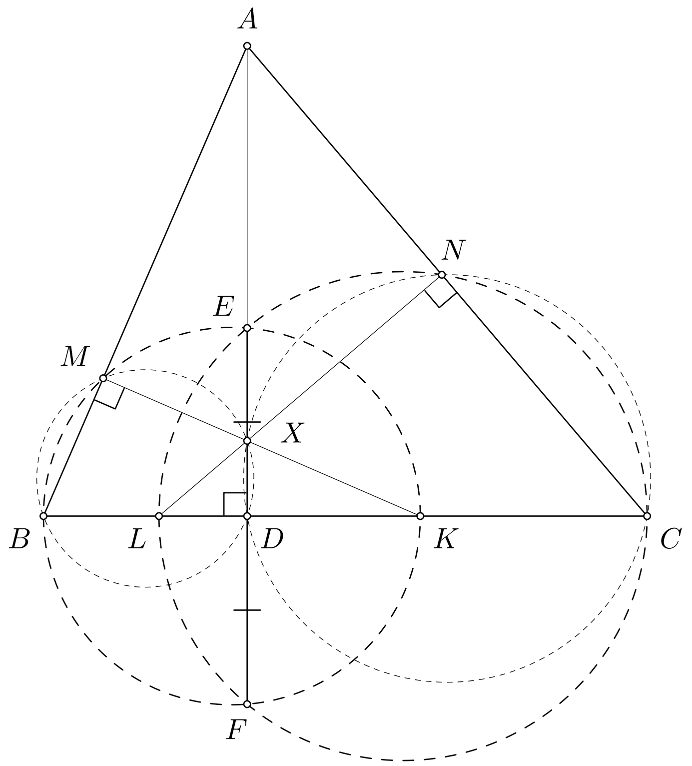
Zadatak 3.

Neka je $\overline{AD}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC. Na pravcu AD nalaze se međusobno različite točke E i F takve da vrijedi $|DE| = |DF|$ i pritom je točka E u unutrašnjosti trokuta ABC. Kružnica opisana trokutu BEF siječe dužine $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama K i M. Kružnica opisana trokutu CEF siječe dužine $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama L i N.

Dokaži da se pravci AD, KM i LN sijeku u jednoj točki.

Rješenje.

Uočimo da središte kružnice opisane trokutu BEF leži na dužini $\overline{BC}$. Stoga je $\overline{BK}$ promjer te kružnice i vrijedi $\sphericalangle BMK = 90°$. Analogno je $\sphericalangle LNC = 90°$.



Neka je X sjecište pravaca AD i KM. Budući da je $\sphericalangle BMX = \sphericalangle BMK = 90°$ i $\sphericalangle XDB = \sphericalangle ADB = 90°$, četverokut $BDXM$ je tetivan.

Također su tetivni i četverokuti $BMEF$ i $EFCN$, pa uzastopnom primjenom poučka o potenciji točke slijedi

$$|AX| \cdot |AD| = |AM| \cdot |AB| = |AE| \cdot |AF| = |AN| \cdot |AC|,$$

zbog čega je i četverokut $CDXN$ tetivan.

Stoga je $\sphericalangle XNC = 180° - \sphericalangle CDX = 90° = \sphericalangle LNC$, odakle slijedi da točka X leži na pravcu LN, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi

$$(n^2+2)^a = (2n-1)^b.$$

Rješenje.

Primijetimo da je $n^2+2 \geqslant 3$, $n^2+2 > 2n-1$ te da n^2+2 i $2n-1$ imaju jednake proste faktore. Neka je p prosti faktor od n^2+2 i $2n-1$. Tada

$$p \mid n^2+2 \quad \text{i} \quad p \mid 2n-1 \implies p \mid (n^2+2)+(2n-1) = (n+1)^2 \implies p \mid n+1.$$

No, sada vidimo da $p \mid 2(n+1)-(2n-1) = 3$ pa zaključujemo da je $p = 3$. Dakle, postoje $k, m \in \mathbb{N}$, $k > m$, takvi da je $n^2+2 = 3^k$ i $2n-1 = 3^m$. Računamo

$$4 \cdot 3^k = 4n^2+8 = (3^m+1)^2+8 = 3^{2m}+2 \cdot 3^m+9,$$

pa 3^m dijeli 9, tj. $m \leqslant 2$. Imamo dvije mogućnosti:

- Ako je $m = 1$, moralo bi biti $2n-1 = 3$, odnosno $n = 2$ i $3^k = 6$, što je nemoguće.
- Ako je $m = 2$, onda je $2n-1 = 9$, odnosno $n = 5$ i $k = 3$.

Dakle, $n = 5$ je jedini takav prirodan broj.