

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

I. razred

1. Odredite sve brojeve čiji je zapis u dekadskom sustavu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x , y i z nepoznate znamenke, koji su djeljivi sa 792.
2. Spojnice središta trokutu upisane kružnice i njegovih vrhova dijele ga na tri trokuta od kojih je jedan sličan polaznome. Odredite kutove polaznog trokuta.
3. Koju najveću vrijednost može poprimiti izraz

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

ako su k , m , n prirodni brojevi takvi da je $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$.

4. Duljine stranica trokuta su a , b i c , a R je duljina polumjera opisane mu kružnice. Odredite kutove trokuta ako vrijedi $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

II. razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi, $a \neq 0$. Ako je x_1 jedno rješenje jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i x_2 jedno rješenje jednadžbe

$$-ax^2 + bx + c = 0,$$

dokažite da je tada jedno rješenje x_3 jednadžbe

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0,$$

između x_1 i x_2 , tj. $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ ili $x_2 \leq x_3 \leq x_1$.

2. Središte U upisane kružnice trokuta ABC spojeno je dužinama s njegovim vrhovima. Neka su O_1, O_2 i O_3 središta kružnica opisanih trokutima BCU, CAU i ABU . Dokažite da kružnice opisane trokutima ABC i $O_1O_2O_3$ imaju zajedničko središte.

3. Ako su a, b i c realni brojevi veći od 1, dokažite da za svaki realni broj r vrijedi nejednakost

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r.$$

4. Dokažite da u svakom skupu od 11 prirodnih brojeva postoji njih 6, čiji je zbroj djeljiv sa 6.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

III. razred

1. Nadite sva rješenja $k, l, m \in \mathbb{N}$ jednadžbe:

$$k!l! = k! + l! + m!.$$

($n!$ označava umnožak prirodnih brojeva od 1 do n .)

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama M , N i R . Neka je S točka na manjem od dva luka $\widehat{MN}$ i t tangenta na taj luk s diralištem S . Tangenta t siječe $\overline{NC}$ i $\overline{MC}$ redom u točkama P i Q . Dokažite da se pravci AP , BQ , SR i MN sijeku u jednoj točki.
3. Odredite skup svih točaka triedra takvih da je zbroj njihovih udaljenosti od strana triedra jednak zadanom pozitivnom broju a .
4. Pravilni poligon s 2005 stranica ima vrhove obojane crvenom, bijelom i plavom bojom. "Dozvoljenim bojanjem" zovemo bojanje u kojem dva susjedna vrha, koja su obojana različitim bojama, obojimo trećom bojom.
- a) Dokažite da postoji konačan niz "dozvoljenih bojanja" nakon kojeg su svi vrhovi poligona iste boje.
- b) Je li ta boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova?

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

IV. razred

1. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je zadan rekursivno s $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 2.$$

Odredite najmanji realni broj M takav da je

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{a_n} < M \quad \text{za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

2. Neka je P polinom n -tog stupnja čiji su svi koeficijenti nenegativni, a vodeći i slobodni koeficijent jednaki su 1. Uz pretpostavku da su sve nultočke od P realni brojevi, dokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $P(x) \geq (x+1)^n$.
3. Dokažite da postoji točno jedan prirodni broj koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima 2005 znamenaka i djeljiv je s 2^{2005} .
4. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut i neka su P i Q redom točke na njegovim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ takve da je $\angle BAP = \angle DAQ$. Dokažite da trokuti ABP i ADQ imaju jednake površine ako i samo ako je spojnica njihovih ortocentara okomita na pravac AC .

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.