HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 5. svibnja 2018.

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=2$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right).$$

Rješenje.

Prema Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c} &\geqslant \frac{(2-a-b)^2}{b+c}=\frac{c^2}{b+c},\\
\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} &\geqslant \frac{(2-b-c)^2}{c+a}=\frac{a^2}{c+a},\\
\frac{(c-1)^2}{a}+\frac{(a-1)^2}{b} &\geqslant \frac{(2-c-a)^2}{a+b}=\frac{b^2}{a+b}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right).$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}-\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{b+c}-\frac{c^2}{c+a} &= \frac{b^2-a^2}{a+b}+\frac{c^2-b^2}{b+c}+\frac{a^2-c^2}{c+a}\\
&= b-a+c-b+a-c=0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right)=\frac{1}{4}\cdot 2\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right),$$

iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 2.

Neka je n prirodni broj. *Dobra riječ* je niz od $3n$ slova pri čemu se svako od slova A, B i C pojavljuje točno n puta. Dokaži da za svaku dobru riječ X postoji dobra riječ Y takva da se Y od X ne može dobiti u manje od $\frac{3}{2}n^2$ zamjena susjednih slova.

Rješenje.

Definiramo *udaljenost* dobrih riječi X i Y, u oznaci $d(X, Y)$, kao najmanji broj zamjena susjednih slova potrebnih da bismo od X dobili Y , ili obratno. Primijetimo da je $d(X, Y) = d(Y, X)$ i da za bilo koje tri dobre riječi X, Y i Z vrijedi

$$d(X, Y) + d(Y, Z) \geqslant d(X, Z).$$

Nadalje, za dobru riječ X označimo s $F(X)$ broj parova pozicija takvih da je na lijevoj poziciji leksikografski manje slovo od onog na desnoj poziciji, tj. broj parova oblika AB, AC ili BC. Zamjenom dvaju susjednih slova u dobroj riječi X dobivamo dobru riječ X'. Ukoliko su ta dva slova jednaka, dobra riječ X se ne mijenja pa možemo pretpostaviti da sve zamjene vršimo nad parovima različitih slova. U slučaju da su slova različita vidimo da je $|F(X) - F(X')| = 1$, iz čega zaključujemo da je

$$d(X, Y) \geqslant |F(X) - F(Y)|,$$

za svake dvije dobre riječi X i Y. Promotrimo dobre riječi

$$P = \underbrace{AA\ldots A}_{n}\underbrace{BB\ldots B}_{n}\underbrace{CC\ldots C}_{n} \quad \text{i} \quad Q = \underbrace{CC\ldots C}_{n}\underbrace{BB\ldots B}_{n}\underbrace{AA\ldots A}_{n}.$$

Vidimo da je $F(P) = 3n^2$ i $F(Q) = 0$, stoga je $d(P, Q) \geqslant 3n^2$.

Konačno, za bilo koju dobru riječ X vrijedi

$$d(P, X) + d(X, Q) \geqslant d(P, Q) \geqslant 3n^2.$$

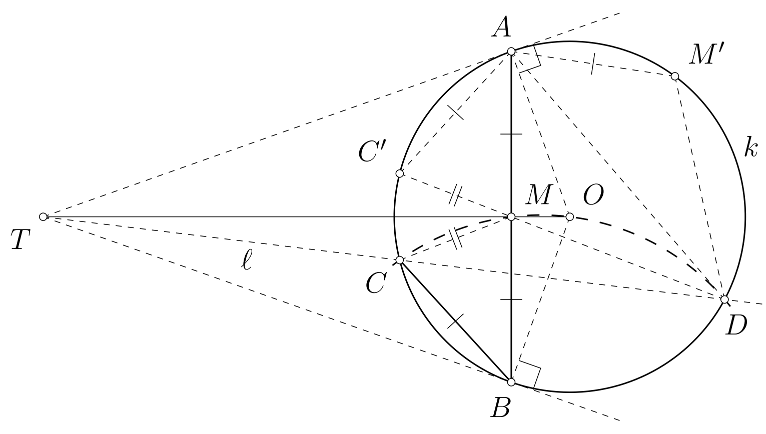
Dakle, jedna od dobrih riječi P i Q se ne može od X dobiti zamjenom manje od $\frac{3}{2}n^2$ susjednih slova.

Zadatak 3.

Dana je kružnica k sa središtem O. Neka je $\overline{AB}$ tetiva te kružnice i M njeno polovište. Tangente na kružnicu k u točkama A i B sijeku se u T. Pravac ℓ prolazi točkom T, siječe kraći luk $\widehat{AB}$ u točki C, a dulji luk $\widehat{AB}$ u točki D i pritom je $|BC| = |BM|$.

Dokaži da je središte kružnice opisane trokutu ADM osnosimetrično točki O u odnosu na pravac AD.

Prvo rješenje.



Budući da točke C i D leže na kružnici k, potencija točke T obzirom na kružnicu k iznosi $|TB|^2 = |TC| \cdot |TD|$.

Iz sličnosti pravokutnih trokuta TBM i TOB slijedi $|TB|^2 = |TM| \cdot |TO|$. Dakle, vrijedi $|TC| \cdot |TD| = |TO| \cdot |TM|$, tj. četverokut $CDOM$ je tetivan.

Neka je točka C' presjek zadane kružnice k i pravca DM i neka je $\alpha = \sphericalangle C'MC$.

Vrijedi $\sphericalangle OCD = \sphericalangle OMD = 180^\circ - \alpha$. Također vrijedi

$$\sphericalangle CC'M = \sphericalangle CC'D = \frac{1}{2}\sphericalangle COD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

pa je $\sphericalangle C'CM = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle CC'M$, tj. $|C'M| = |CM|$.

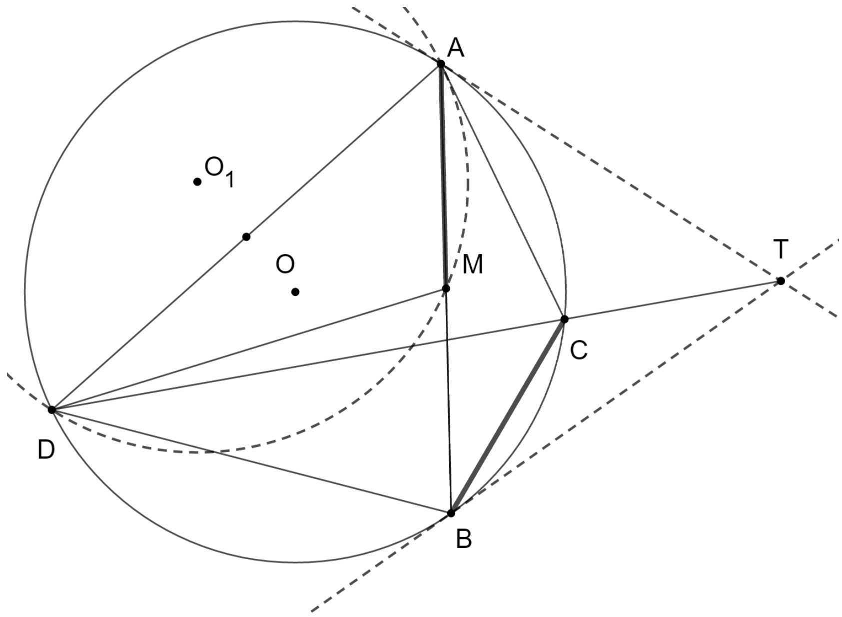
Neka je točka M' različita od C' na kružnici k takva da je $|AM'| = |AC'|$. Tada je

$$\sphericalangle M'DA = \sphericalangle C'DA = \sphericalangle MDA.$$

Zaključujemo da su trokuti MDA i $M'DA$ sukladni (dva para sukladnih stranica, jedan par sukladnih kutova i oba su tupokutna), pa je M' osnosimetrična točki M obzirom na pravac AD. Iz činjenice da je točka O središte opisane kružnice trokutu ADM' slijedi tvrdnja zadatka.

Drugo rješenje.

Koristeći svojstva simedijana, zadatak se može riješiti na sljedeći način.



Uočimo da je pravac DT simedijana trokuta DAB (jer se tangente na njegovu opisanu kružnicu u točkama A i B sijeku u T). Zato su pravci DT i DM (težišnica) izogonalni s obzirom na kut $\sphericalangle ADB$, tj. vrijedi $\sphericalangle BDT = \sphericalangle MDA$.

Promotrimo sukladne dužine $\overline{BC}$ i $\overline{AM}$. Dužina $\overline{BC}$ je tetiva kružnice opisane četverokutu trokutu $ABCD$ s obodnim kutom $\sphericalangle BDC$, a dužina $\overline{AM}$ je tetiva kružnice opisane trokutu ADM s obodnim kutom $\sphericalangle MDA$. Kako su tetive sukladne i obodni kutovi jednaki, slijedi da su i kružnice sukladne.

To znači da je $|OA| = |O_1A|$ odakle tvrdnja lagano slijedi.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$2^m = 7n^2 + 1.$$

Rješenje.

Primijetimo da je $2^m \equiv 1 \pmod 7$, iz čega zaključujemo da mora vrijediti $m = 3k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Sada je

$$(2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1) = 7n^2.$$

Označimo $A = 2^k - 1$ i $B = 2^{2k} + 2^k + 1$. Označimo s d najveći zajednički djelitelj brojeva A i B i primijetimo da je d neparan. Nadalje, broj d dijeli i broj $B - A^2 = 2^k + 2^{k+1} = 3 \cdot 2^k$, a kako je d neparan, zaključujemo da mora vrijediti $d = 1$ ili $d = 3$.

Dakle, imamo točno četiri mogućnosti za faktorizaciju brojeva A i B. U svakom slučaju podrazumijevamo da su a i b relativno prosti prirodni brojevi.

1. slučaj. $A = 7a^2$ i $B = b^2$. Ovo je nemoguće zato što je $(2^k)^2 < B < (2^k + 1)^2$, tj. B ne može biti potpun kvadrat.

2. slučaj. $A = a^2$ i $B = 7b^2$. Ukoliko je $k \geqslant 2$ primijetimo da je $B \equiv 1 \pmod 4$, odnosno da je $3b^2 \equiv 1 \pmod 4$, što je nemoguće. Dakle, nužno je $k = 1$ i dobivamo rješenje $(m, n) = (3, 1)$.

3. slučaj. $A = 21a^2$ i $B = 3b^2$. Isto kao i u drugom slučaju zaključujemo da je nužno $k = 1$, ali to je nemoguće u ovom slučaju, zato što je $21a^2 = A = 2^1 - 1 = 1$.

4. slučaj. $A = 3a^2$ i $B = 21b^2$. Dakle, broj A je djeljiv s 3, odnosno $2^k \equiv 1 \pmod 3$, iz čega zaključujemo da je $k = 2l$, za neki $l \in \mathbb{N}$. Sada je

$$(2^l - 1)(2^l + 1) = 3a^2.$$

Budući da su brojevi $2^l - 1$ i $2^l + 1$ relativno prosti, imamo samo dvije mogućnosti:

$$\begin{aligned} 2^l - 1 &= c^2 \\ 2^l + 1 &= 3d^2 \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \begin{aligned} 2^l - 1 &= 3c^2 \\ 2^l + 1 &= d^2 \end{aligned},$$

gdje su c i d relativno prosti prirodni brojevi.

U prvoj mogućnosti, ako je $l \geqslant 2$, onda je $3d^2 \equiv 1 \pmod 4$, što je nemoguće. Dakle, nužno je $l = 1$ i ovdje dobivamo još jedno rješenje $(m, n) = (6, 3)$.

U drugoj mogućnosti, vrijedi da je $2^l = (d - 1)(d + 1)$. Kako je najveći zajednički djelitelj brojeva $d - 1$ i $d + 1$ jednak najviše 2 i njihov umnožak je potencija broja 2, zaključujemo da je $d - 1 = 2$, odnosno da je $l = 3$, ali onda je $3c^2 = 2^3 - 1 = 7$, što je nemoguće.

Konačno, sva rješenja dane jednadžbe su $(m, n) = (3, 1)$ i $(m, n) = (6, 3)$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 6. svibnja 2018.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x, y vrijedi

$$f(xf(y)) = (1-y)f(xy) + x^2y^2f(y).$$

Rješenje.

Označimo s $P(x,y)$ uvrštavanje vrijednosti x i y u početnu jednadžbu. Tada imamo

$$\begin{aligned} P(0,1): &\qquad f(0) = 0 \\ P(1,1): &\qquad f(f(1)) = f(1) \\ P(1,f(1)): &\qquad f(f(f(1))) = (1-f(1)) \cdot f(f(1)) + f(1)^2 \cdot f(f(1)) \end{aligned}$$

Iz druge i treće jednakosti dobivamo

$$f(1) = (1-f(1)) \cdot f(1) + f(1)^3, \quad \text{odnosno} \quad f(1)^2 = f(1)^3.$$

Odavde imamo dvije mogućnosti: $f(1) = 1$ i $f(1) = 0$.

Ako je $f(1) = 1$, dobivamo

$$P(x,1): \qquad f(x) = x^2,$$

pa bi trebalo vrijediti $f(x) = x^2$ za svaki x. Direktnim uvrštavanjem u početnu jednadžbu vidimo da ovo nije moguće, stoga zaključujemo da vrijedi $f(1) = 0$.

Neka je sada c proizvoljna nultočka funkcije f. Imamo

$$P(x,c): \qquad 0 = (1-c)f(xc).$$

Prema tome, ako je $c \neq 1$, vrijedi i $f(cx) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $c \neq 0$, odavde slijedi da vrijedi $f(x) = 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Direktnom provjerom utvrđujemo da je $f \equiv 0$ doista jedno moguće rješenje početne jednadžbe.

Pretpostavimo sada da f nije identički jednaka nuli. Gornji račun pokazuje da su tada 0 i 1 jedine nultočke funkcije f. Sada imamo

$$P(1,y): \qquad f(f(y)) = (1-y)f(y) + y^2f(y) = (1-y+y^2)f(y), \tag{1}$$

te za $x \neq 0$

$$P\left(\frac{1}{x}, x\right): \qquad f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = f(x) \tag{2}$$

jer je $f(1) = 0$.

Neka su sada $y_1, y_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ takvi da vrijedi $f(y_1) = f(y_2) \neq 0$. Tada iz (1) lako slijedi

$$1 - y_1 + y_1^2 = 1 - y_2 + y_2^2, \quad \text{odnosno} \quad (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 1) = 0.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ ili } y_1 + y_2 = 1. \tag{3}$$

Kombiniranjem relacija (2) i (3) dobivamo da za svaki $x \neq 0, 1$ vrijedi

$$\frac{f(x)}{x} = x \text{ ili } \frac{f(x)}{x} + x = 1,$$

to jest

$$f(x) = x^2 \text{ ili } f(x) = x - x^2.$$

Neka je sada $x \in \mathbb{R}, x \notin \{0,1\}$ takav da vrijedi $f(x) = x^2$. Uvrštavanjem $y = x$ u (1) dobivamo

$$f(x^2) = (1 - x + x^2)x^2.$$

Sada imamo dva slučaja: $f(x^2) = x^4$ i $f(x^2) = x^2 - x^4$. Prva mogućnost daje $x^4 = (1-x+x^2)x^2$, odakle lako slijedi $x = 0$ ili $x = 1$. Budući da smo pretpostavili $x \notin \{0,1\}$, ovo nije moguće. Druga mogućnost daje $x^2 - x^4 = (1 - x + x^2)x^2$, odakle slijedi $x = 0$ ili $x = \frac{1}{2}$. Slučaj $x = 0$ ponovno odbacujemo, dok za $x = \frac{1}{2}$ uočavamo

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ovime smo pokazali da za sve $x \neq 0, 1$ vrijedi $f(x) = x - x^2$. Kako i za $x = 0, 1$ vrijedi ova formula, zaključujemo da vrijedi

$$f(x) = x - x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Direktnim uvrštavanjem u početnu jednadžbu potvrđujemo da smo ovime doista dobili rješenje. Prema tome, jedina rješenja zadane jednadžbe su $f \equiv 0$ i $f(x) = x - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.

Neka je n prirodni broj. Unutar kružnice nalaze se točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a na kružnici točke $B_1, B_2, \ldots, B_n$ takve da su dužine $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ u parovima disjunktne. Skakavac smije skočiti iz točke A_i u točku A_j (za $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$) ako i samo ako dužina $\overline{A_iA_j}$ ne prolazi nijednom unutarnjom točkom dužina $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$.

Pokaži da skakavac nizom skokova može doći iz bilo koje točke A_i u bilo koju točku A_j.

Prvo rješenje.

Neka je *put* bilo koja dužina $\overline{A_iA_j}$, a *bedem* bilo koja dužina $\overline{A_kB_k}$. Za put i bedem ćemo reći da se sijeku ako put prolazi nekom unutarnju točkom bedema. Put je *dobar* ako ne postoji bedem koji ga siječe, a bedem je *nebitan* ako ne siječe niti jedan put.

Tvrdnja 1. Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji barem jedan dobar put iz točke A_i.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za točku A_1, a analogno onda vrijedi za bilo koju točku A_i. Udaljenost točke A i bedema b definiramo kao

$$\min_{T \in b} |AT|.$$

Kako su bedemi međusobno disjunktni, znamo da niti jedan od bedema $\overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ ne sadrži točku A_1. Neka je $\overline{A_kB_k}$ onaj bedem među njima koji je najbliži točki A_1. Tvrdimo da je put $\overline{A_1A_k}$ dobar. Pretpostavimo li suprotno, to znači da postoji bedem koji siječe put $\overline{A_1A_k}$. Tada je taj bedem bliži točki A_1 od bedema $\overline{A_kB_k}$, što je kontradikcija. $\square$

Tvrdnja 2. Postoji barem jedan nebitni bedem.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da točke $A_1, A_2, \ldots, A_k$ čine konveksnu ljusku skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ te da se u tom poretku nalaze kao vrhovi mnogokuta $M = A_1A_2 \ldots A_k$, u smjeru kazaljke na satu. Ukoliko je bedem $b_1 = \overline{A_1B_1}$ nebitan, gotovi smo, stoga pretpostavimo da bedem b_1 siječe neki put. To znači da taj bedem prolazi unutrašnjim točkama mnogokuta M, a kako su bedemi međusobno disjunktni, zaključujemo da b_1 sigurno siječe i neki put koji je stranica mnogokuta M. Naime, ne smije prolaziti niti jednim vrhom mnogokuta M, osim vrhom A_1. Neka je C točka presjeka bedema b_1 i ruba mnogokuta M. Promotrimo luk $\widehat{A_1C}$ (u smjeru kazaljke na satu od točke A_1 do točke C), na njemu se nalaze točke $A_2, \ldots, A_l$. Ponovimo sad isto razmatranje za bedem $\overline{A_2B_2}$. Kako su bedemi međusobno disjunktni, njegov pripadajući luk je strogo manji od luka bedema b_1. Dakle, ukoliko je svaki od bedema $\overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_{l-1}B_{l-1}}$ bitan, onda je sigurno bedem $\overline{A_lB_l}$ nebitan. $\square$

Tvrdnju zadatka konačno dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da vrijedi za neki prirodni broj n. Za $n+1$, iz Tvrdnje 2 slijedi da postoji točka A_i takva da je bedem $\overline{A_iB_i}$ nebitan. Prema pretpostavci sada zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve točke osim eventualno za točku A_i. No, prema Tvrdnji 1, točka A_i je povezana dobrim putem s barem jednom od preostalih točki, čime je tvrdnja za $n + 1$ dokazana.

Drugo rješenje.

Uz oznake kao u prvom rješenju dokažimo nešto jaču Tvrdnju 2:

*Tvrdnja 2.** Postoje barem dva nebitna bedema (za $n \geqslant 2$).

Dokaz. Potpuno ista argumentacija kao u dokazu originalne Tvrdnje 2, samo što promatramo i luk u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, tj. "s obje strane" dobijemo po jedan nebitan bedem. $\square$

Tvrdnju opet dokazujemo matematičkom indukcijom po n. U koraku indukcije izoliramo dva nebitna bedema, $\overline{A_iB_i}$ i $\overline{A_jB_j}$. Po pretpostavci su sve točke osim eventualno A_i povezane, ali također i sve osim eventualno A_j. Odnosno, sve su povezane, čime smo gotovi.

Zadatak 3.

Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem je $|AB| < |AC|$. Točka D je polovište kraćeg luka $\widehat{BC}$ njegove opisane kružnice. Točka I je središte njegove upisane kružnice, a točka J je osnosimetrična točki I u odnosu na pravac BC. Pravac DJ siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki E koja pripada luku $\widehat{AB}$.

Dokaži da vrijedi $|AI| = |IE|$.

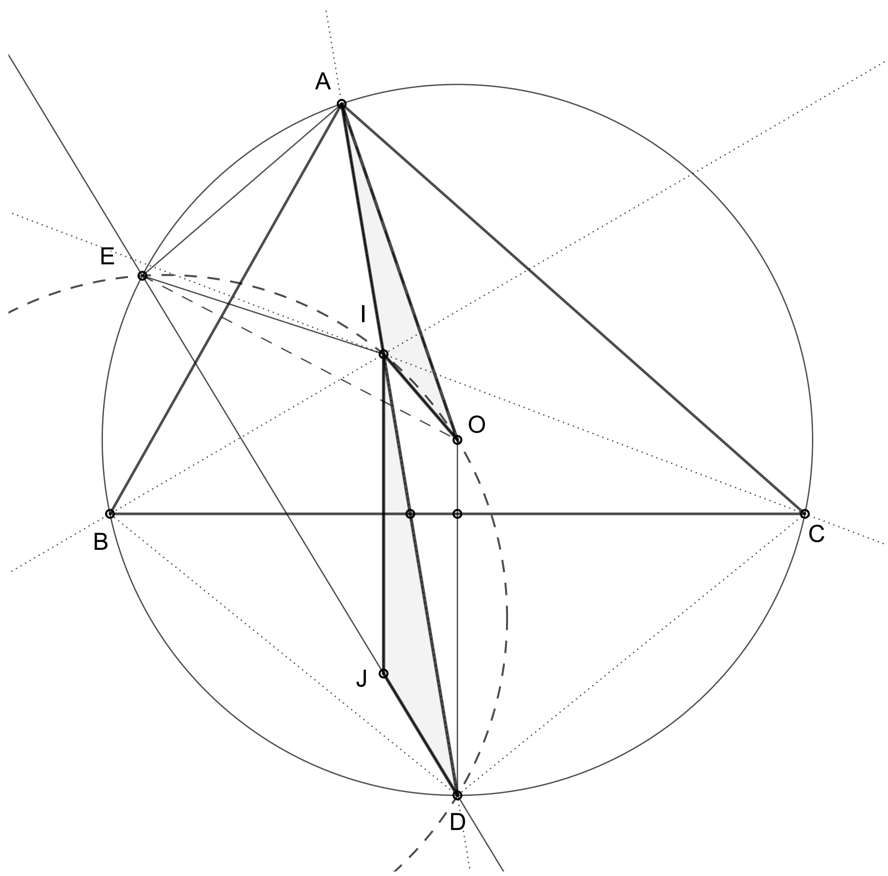
Prvo rješenje.

Točka D leži na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, pa su A, I i D kolinearne. Pravci IJ i OD okomiti su na BC pa su međusobno paralelni.

Ideja rješenja je dokazati sukladnost trokuta AIO i AIO.

Dokazat ćemo najprije da su trokuti AIO i IJD slični. Uočimo da je $\sphericalangle IAO = \sphericalangle DAO = \sphericalangle ADO = \sphericalangle IDO = \sphericalangle DIJ$. Stoga nam je za sličnost ovih trokuta potrebna još samo relacija $|AI| : |AO| = |IJ| : |ID|$, odnosno

$$|AI| \cdot |ID| = |AO| \cdot |IJ|. \tag{1}$$



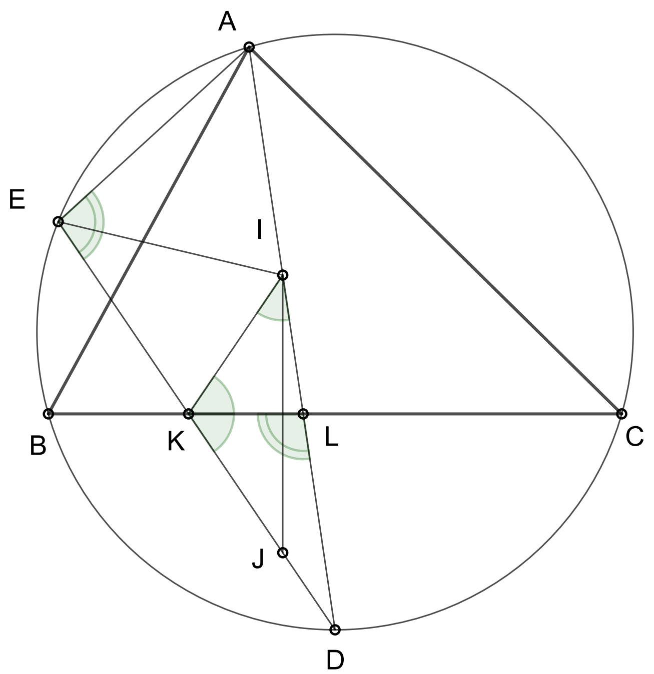
Vrijedi $|IJ| = 2r$ i $|AO| = R$, gdje smo sa r i R označili polumjere upisane i opisane kružnice, redom. Zato je desna strana relacije (1) jednaka $2rR$. Umnožak na lijevoj strani, $|AI| \cdot |ID|$, zapravo je potencija točke I u odnosu na opisanu kružnicu, te iznosi $R^2 - |IO|^2$. Dakle, treba provjeriti da vrijedi $R^2 - |IO|^2 = 2rR$, no to je istina zbog Eulerove formule koja izražava udaljenost središta upisane i opisane kružnice trokuta pomoću polumjera tih kružnica.

Dakle, možemo zaključiti da je $\triangle AIO \sim \triangle IJD$. To znači da je $\sphericalangle OIA = \sphericalangle DJI$, a stoga i $\sphericalangle DIO = \sphericalangle IJE$. Zbog paralelnosti pravaca IJ i OD, $\sphericalangle IJE = \sphericalangle ODE$, a zbog $|OE| = |OD|$ vrijedi $\sphericalangle ODE = \sphericalangle DEO$. Dokazali smo da je $\sphericalangle DIO = \sphericalangle DEO$, a to znači da su točke D, O, I i E konciklične.

Zbog te koncikličnosti vrijedi $\sphericalangle IOE = \sphericalangle IDE$, a iz dokazane sličnosti trokuta je $\sphericalangle IDE = \sphericalangle IDJ = \sphericalangle AOI$. Ovo znači da je $\sphericalangle IOE = \sphericalangle AOI$, pa zbog $|AO| = |EO|$ i zajedničke stranice $\overline{IO}$ slijedi da su trokuti EOI i AOI sukladni.

Drugo rješenje.

Jasno je da su točke A, I i D kolinearne, a poznata je činjenica da je točka D jednako udaljena od B, C i I, tj. da B, C i I leže na kružnici sa središtem u D. Promotrimo inverziju u odnosu na tu kružnicu. Ona opisanu kružnicu danog trokuta preslikava na pravac BC (i obratno), a to znači da su slike točaka A i E na pravcu BC. Preciznije, točka E se preslikava u točku $ED \cap BC = K$, a točka A u točku $AD \cap BC = L$.



Poznato je svojstvo inverzije: Ako inverzija sa centrom O preslikava točke X i Y redom u X' i Y', onda vrijedi $\sphericalangle OX'Y' = \sphericalangle OYX$.

Označimo $\sphericalangle EAI = \varphi$ i primijenimo navedeno svojstvo inverzije na točke A i E te njihove slike:

$$\sphericalangle LKD = \sphericalangle EAD = \varphi. \tag{2}$$

Također, kako se pri promatranoj inverziji točka I preslikava na sebe, vrijedi:

$$\sphericalangle EID = \sphericalangle IKD. \tag{3}$$

Točka K leži na simetrali dužine $\overline{IJ}$ pa je $\sphericalangle LKD = \sphericalangle LKJ = \sphericalangle LKI$, što znači da vrijedi $\sphericalangle IKD = 2\varphi$.

Prema (3), $\sphericalangle EID = 2\varphi$, no kako je to vanjski kut trokuta EAI slijedi

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle EID - \sphericalangle EAI = 2\varphi - \varphi = \varphi = \sphericalangle EAI.$$

Stoga je $|EI| = |AI|$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Neka je n prirodni broj. Dokaži da postoji prirodni broj k takav da je broj

$$51^k - 17$$

djeljiv brojem 2^n.

Rješenje.

Tvrdnja. Za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ postoji prirodni broj k takav da je $51^{2^{n-2}} - 1 = 2^n \cdot (2k+1)$.

Dokaz. Matematičkom indukcijom po n.

Za $n = 3$ je $51^2 - 1 \equiv 3^2 - 1 = 8 \pmod{16}$ pa 2^3 dijeli $51^2 - 1$, a 2^4 ne dijeli, tj. tvrdnja vrijedi za $n = 3$. Pretpostavimo da je $51^{2^{n-2}} - 1 = 2^n \cdot (2k+1)$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$51^{2^{n-1}} - 1 = (51^{2^{n-2}} - 1)(51^{2^{n-2}} + 1) = 2^n \cdot (2k+1) \cdot (2^n \cdot (2k+1) + 2) = 2^{n+1} \cdot (2k+1)(2^{n-1}(2k+1) + 1).$$

Broj $(2k+1)(2^{n-1}(2k+1)+1)$ je neparan pa smo gotovi. $\square$

Vratimo se na početnu tvrdnju zadatka. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ ćemo induktivno definirati odgovarajući k_n. Primijetimo da je za $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ dobar odabir $k = 2$, tj. da možemo definirati $k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da postoji neki prirodni broj a_n takav da je $51^{k_n} - 17 = 2^n \cdot a_n$. Ako je a_n paran, onda možemo odabrati $k_{n+1} = k_n$. Ako je a_n neparan, možemo definirati $k_{n+1} = k_n + 2^{n-2}$. Tada vrijedi

$$51^{k_{n+1}} - 17 = 51^{2^{n-2}} \cdot (51^{k_n} - 17) + 17 \cdot (51^{2^{n-2}} - 1).$$

Prema pretpostavci indukcije i dokazanoj Tvrdnji možemo zaključiti da postoji prirodni broj k takav da je

$$\begin{aligned} 51^{k_{n+1}} - 17 &= 51^{2^{n-2}} \cdot 2^n \cdot a_n + 17 \cdot 2^n \cdot (2k+1) \\ &= 2^n \cdot (51^{2^{n-2}} a_n + 17(2k+1)). \end{aligned}$$

Budući da je a_n neparan, zaključujemo da je broj $51^{2^{n-2}} a_n + 17(2k+1)$ paran, tj. da je broj $51^{k_{n+1}} - 17$ uistinu djeljiv s 2^{n+1}.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 13. svibnja 2018.

Zadatak 1.

Neka su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi s realnim koeficijentima takvi da je

$$P(P(x)) = (Q(x))^2$$

za svaki realni broj x. Postoji li nužno polinom $R(x)$, također s realnim koeficijentima, takav da je $P(x) = (R(x))^2$ za svaki realni broj x ?

Prvo rješenje.

Da, nužno postoji takav polinom $R(x)$.

Najprije, primijetimo da možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ normirani. Ukoliko je polinom $Q(x)$ konstantan, onda je takav i $P(x)$ te vrijedi da je $P(x) = Q^2(x)$. Dakle, pretpostavimo da polinom $Q(x)$ nije konstantan, onda takav nije ni $P(x)$. Za stupnjeve polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ vrijedi jednakost

$$(\deg P)^2 = 2\deg Q.$$

Zato postoji prirodan broj n takav da je $\deg P = 2n$ i $\deg Q = 2n^2$. Neka su k i m prirodni brojevi te $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sve međusobno različite nultočke polinoma $P(x)$ i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ sve međusobno različite nultočke polinoma $Q(x)$. Nadalje, neka je e_i kratnost nultočke α_i polinoma $P(x)$, za $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ i f_j kratnost nultočke β_j polinoma $Q(x)$, za $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dakle,

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \alpha_i)^{e_i} \quad \text{i} \quad Q(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j)^{f_j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iz uvjeta u zadatku zaključujemo da vrijedi

$$\prod_{i=1}^{k}(P(x) - \alpha_i)^{e_i} = \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j)^{2f_j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sada primijetimo da je svaki β_j nultočka jednog i samo jednog polinoma $P(x) - \alpha_i$. To znači da je svaki polinom $(P(x) - \alpha_i)^{e_i}$ kvadrat nekog polinoma.

Želimo pokazati da su svi e_i parni. Pretpostavimo suprotno, tj. da je barem jedan neparan. Kako je $\sum\limits_{i=1}^{k} e_i = 2n$, što je paran broj, zaključujemo da su tada barem dva e_i neparna. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su to e_1 i e_2. To znači da su polinomi $P(x) - \alpha_1$ i $P(x) - \alpha_2$ kvadrati nekih polinoma, tj. da postoje polinomi $R_1(x)$ i $R_2(x)$, s realnim koeficijentima, takvi da je

$$P(x) - \alpha_1 = R_1^2(x) \quad \text{i} \quad P(x) - \alpha_2 = R_2^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

No, tada je

$$\underbrace{\big(R_1(x) - R_2(x)\big)}_{A(x)}\underbrace{\big(R_1(x) + R_2(x)\big)}_{B(x)} = \alpha_2 - \alpha_1 = \text{const.} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je nemoguće da su oba polinoma A i B konstantna. To znači da je jedan od njih nul polinom, što je kontradikcija.

Dakle, svi e_i su parni, što upravo znači da je P kvadrat nekog polinoma.

Drugo rješenje.

Da, nužno postoji takav polinom $R(x)$.

Najprije, primijetimo da možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ normirani. Ukoliko je polinom $Q(x)$ konstantan, onda je takav i $P(x)$ te vrijedi da je $P(x) = Q^2(x)$. Dakle, pretpostavimo da polinom $Q(x)$ nije konstantan, onda takav nije ni $P(x)$. Za stupnjeve polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ vrijedi jednakost

$$(\deg P)^2 = 2\deg Q.$$

Zato postoji prirodan broj n takav da je $\deg P = 2n$ i $\deg Q = 2n^2$. To znači da postoje polinomi $R(x)$ i $S(x)$, s realnim koeficijentima, takvi da je

$$P(x) = R^2(x) + S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

i da za njihove stupnjeve vrijedi da je $\deg R = n$ i $\deg S < n$. Neka je

$$A(x) = R(P(x)) \quad \text{i} \quad B(x) = S(P(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

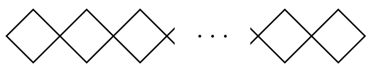
Tada je

$$B(x) = Q^2(x) - A^2(x) = (Q(x) - A(x))(Q(x) + A(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi da je $\deg A = 2n^2 = \deg Q$ pa ako $B(x)$ nije nul polinom, onda mu je stupanj barem $2n^2$. Međutim, to je nemoguće pošto je stupanj polinoma $B(x)$ najviše jednak $(n-1)\cdot 2n = 2n^2 - 2n < 2n^2$. Dakle, polinom $B(x)$ je nul polinom, a kako polinom $P(x)$ nije nul polinom, zaključujemo da je polinom $S(x)$ nul polinom. Odnosno, vrijedi da je $P(x) = R^2(x)$, za svaki realni broj x.

Zadatak 2.

Na slici je prikazan *lanac* sastavljen od 54 jedinična kvadratića. Svaki kvadratić, osim dvaju rubnih, spojen je s dva susjedna u nasuprotnim vrhovima.



Svaki kvadratić smije se postaviti u bilo koji položaj u prostoru uz uvjet da ostane spojen sa susjednim kvadratićima u odgovarajućim vrhovima. Je li moguće taj lanac postaviti tako da tvori oplošje kocke dimenzija $3 \times 3 \times 3$?

Rješenje.

Nije moguće.

Pretpostavimo suprotno, tj. da smo danim lancem u potpunosti prekrili oplošje $3 \times 3 \times 3$ kocke. U svakom kvadratiću lanca povucimo dijagonalu koja spaja nasuprotne vrhove koji su spojnice lanca (uključujući i dva rubna vrha). Uz to, vrhovi lanca koji su spojnice lanca neka su obojeni crno, a svi ostali vrhovi neka su bijeli.

Ovime smo na kocki dobili jednu izlomljenu liniju (koja moguće presijeca samu sebe). Primijetimo da je stupanj svakog vrha, osim rubna dva, paran. Naime, svaki vrh je spojen s točno dva druga vrha, dok su rubni spojeni s točno jednim. Preciznije, svaki crni vrh, osim rubna dva, će na kocki imati stupanj 4, dok će rubna dva imati stupanj 3 ili 4 (u slučaju da krenemo i završimo u istom vrhu).

S druge strane, promotrimo sada kocku. Primijetimo da su njena 4 vrha crna, a svaki vrh ima stupanj jednak 3. To znači da imamo barem 4 vrha neparnog stupnja, što je kontradikcija.

Zadatak 3.

Upisana kružnica trokuta ABC ima središte I te dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u točkama D, E, F. Neka je k kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku E. Drugo sjecište pravca DE s kružnicom k je točka K. Paralela s pravcem DF kroz točku I siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki P. Točka L je sjecište pravca CP i kružnice k takvo da se P nalazi između točaka C i L. Točka O je središte opisane kružnice trokuta DKL.

Dokaži da su pravci AI i OD paralelni.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi $\sphericalangle AKE = \sphericalangle AEK = \sphericalangle DEC = 90° - \gamma/2$. Stoga je $|AK| = |AE| = s - a$ te $AK \parallel CD$.

Neka je L' presjek pravaca CP i AK. Budući da su trokuti PBC i PAL' slični, trigonometrijskim računom dobivamo $|BP| : |AP| = |BC| : |AL'|$, iz čega slijedi $|AL'| = |AK| = |AE|$. Prema tome, možemo zaključiti da L' leži na kružnici k, pa mora vrijediti $L' \equiv L$. Slično možemo pokazati da su D, F i L kolinearne.

Sada znamo da je $\overline{KL}$ promjer kružnice k. Promotrimo trokute AKO i EAI. Oba trokuta su pravokutna i vrijedi $\sphericalangle AKO = 90° - \sphericalangle KOA = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle KDL = \sphericalangle IAE$. Prema tome, trokuti su sukladni, što znači da su dužine $\overline{AO}$ i $\overline{ID}$ paralelne, budući da su okomite na pravce KL i BC (redom) i imaju jednake duljine ($|ID| = |IE| = |OA|$). Slijedi da je četverokut $AODI$ paralelogram, pa vrijedi $AI \parallel OD$.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje vrijedi:

Za bilo koje cijele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, čiji zbroj nije djeljiv s n, postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da nijedan od n brojeva

$$a_i, \quad a_i + a_{i+1}, \quad \ldots, \quad a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-1}$$

nije djeljiv s n, pri čemu za $i > n$ definiramo $a_i = a_{i-n}$.

Rješenje.

Traženi brojevi su svi prosti brojevi.

Neka je n složen broj, tj. $n = ab$, gdje su $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 2$ prirodni brojevi. Promotrimo niz

$$0, b, b, \ldots, b,$$

u kojem se broj b pojavljuje $ab - 1$ puta. Suma svih brojeva u tom nizu je $ab^2 - b$, što nije djeljivo s $n = ab$. No, primijetimo da, od kojeg god mjesta krenemo, suma a (odnosno $a+1$, ako prelazimo broj 0) uzastopnih brojeva u tom niz će biti jednaka ab, tj. bit će djeljiva s $n = ab$.

Neka je $n = p$ prost broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje cijeli brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_p$ čiji zbroj nije djeljiv s p takvi da za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ postoji $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+p-1\}$ takav da je broj $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}$ djeljiv s p. Sjetimo se da sve operacije nad indeksima vršimo imajući na umu da je $a_i = a_{i-p}$ za $i > p$.

Zamislimo sada brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_p$ kao vrhove grafa u kojem su dva vrha a_i i a_j povezana usmjerenim bridom $a_i \to a_j$ ukoliko je suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1}$ djeljiva s p. Prema pretpostavci svaki vrh ima barem jedan izlazni brid, a kako imamo konačno vrhova, zaključujemo da naš graf ima ciklus.

Promotrimo ciklus i pozbrojimo sve sume koje odgovaraju bridovima tog ciklusa. Primijetimo da se svaki od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_p$ u tim sumama pojavljuje jednako mnogo puta te označimo taj broj pojavljivanja s k. Također, u tom ciklusu imamo najviše p bridova, a za svaki brid odgovarajuća suma ima najviše $p-1$ pribrojnika, zato što suma svih brojeva u početnom nizu nije djeljiva s p. Stoga je $k \leqslant p - 1$. No, svaka od tih suma duž bridova je djeljiva s p pa je suma svih djeljiva s p, odnosno

$$p \mid k(a_1 + a_2 + \cdots + a_p).$$

Ovo je kontradikcija jer zbog $k < p$ vrijedi $p \nmid k$ i $p \nmid a_1 + a_2 + \cdots + a_p$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 13. svibnja 2018.

Zadatak 1.

Neka su n, k, M i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \qquad \text{i} \qquad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Ako je $M > 1$, dokaži da ne postoji pozitivan realni broj x takav da vrijedi

$$M(x+1)^k = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n).$$

Rješenje.

Tvrdnja. Za prirodan broj a i realan broj $x > 0$ vrijedi

$$a(x+1)^{\frac{1}{a}} \leqslant x + a,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = 1$.

Dokaz. Ukoliko je $a = 1$ vidimo da vrijedi jednakost, za svaki realni broj $x > 0$. Pretpostavimo da je $a > 1$, primjenimo A–G nejednakost na broj $x + 1$ i $a - 1$ brojeva 1

$$\frac{(x+1) + \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{a-1}}{a} \geqslant \sqrt[a]{(x+1) \cdot 1^{a-1}},$$

odnosno

$$a(x+1)^{\frac{1}{a}} \leqslant x + a.$$

Primijetimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $x + 1 = 1$, što je nemoguće jer je $x > 0$. $\square$

Vratimo se tvrdnji iz zadatka, koristimo dokazanu tvrdnju.

$$\begin{aligned} M(x+1)^k &= a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}} a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}} \cdots a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}} \\ &\leqslant (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n), \end{aligned}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. No, $a_1 a_2 \cdots a_n = M > 1$ pa zaključujemo da to nije slučaj. Dakle, dana jednadžba nema rješenja u pozitivnim realnim brojevima.

Zadatak 2.

Neka je $a \geqslant 2018$ realni broj. U svakoj od 2018 posuda nalazi se konačan broj kuglica, pri čemu je masa svake kuglice oblika a^k, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Ukupna masa kuglica u svakoj posudi je jednaka. Koliko se najmanje kuglica jednake mase pojavljuje među kuglicama u posudama?

Rješenje.

Najmanji broj loptica jednake mase među odabranim lopticama je 2018.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je masa najlakše loptice jednaka 1, jednostavno sve mase (među odabranim lopticama) podijelimo s masom najlakše, pri tome su sva svojstva očuvana.

Pretpostavimo da se pojavljuje najviše 2017 loptica jednake mase, među odabranim lopticama. Neka je n prirodan broj takav da je a^n masa najteže loptice među odabranima. Kako je loptica mase a^n najviše 2017, onda postoji posuda u kojoj nema niti jedne loptice mase a^n, tj. sve su lakše. No, tada je masa te posude jednaka najviše

$$2017 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 2017 \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \leqslant 2017 \cdot \frac{a^n - 1}{2017} = a^n - 1 < a^n,$$

što je kontradikcija.

Dakle, pojavljuje se barem 2018 loptica jednake mase.

Ukoliko u svaku posudu stavimo lopticu mase 1, vidimo da sve posude imaju jednaku masu i da se pri tome pojavljuje točno 2018 loptica jednake mase.

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dijagonale trapeza sijeku se u točki S, a polovište stranice $\overline{AD}$ je točka M. Kružnica opisana trokutu BCM ponovno siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki K. Dokaži da su pravci SK i AB međusobno paralelni.

Rješenje.

Umjesto originalne formulacije, čini mi se lakše riješiti ovo: Uz $ABCD$ i O kao u originalnom zadatku, neka je K na AD takva da je $OK \parallel AB$ i neka je M drugo sjecište kružnice (BCK) sa AD. Treba dokazati da je M polovište od AD. Neka je M' na BC takva da je $MM' \parallel AB$ i neka se CK i AB sijeku u T. Kako je trapez jednakokračan, a $BCKM$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle DAM' = \sphericalangle CBM = \sphericalangle MKT$, pa je $AM' \parallel TC$. Koristeći sličnost trokuta, dobivamo $|AT|/|CD| = |KA|/|KD| = d(O, AB)/d(O, CD) = |AB|/|CD|$, pa je $|AT| = |AB|$ odnosno $|M'B| = |M'C|$, pa je M' polovište od $\overline{BC}$ i naravno M polovište od $\overline{AD}$.

Zadatak 4.

Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$ postoje prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da je za sve $1 \leqslant i < j \leqslant n$

$$\frac{a_j + a_i}{a_j - a_i}$$

prirodan broj.

Rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Za skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ prirodnih brojeva ćemo reći da je *dobar* ako zadovoljava uvjet zadatka.

Za $n = 2$ je skup $\{1, 2\}$ očito dobar. Pretpostavimo da za neki prirodni broj $n \geqslant 2$ postoji dobar skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Neka je a najmanji zajednički višekratnik skupa

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{a_j - a_i : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Tvrdimo da je skup $\{a, a + a_1, a + a_2, \ldots, a + a_n\}$, koji ima $n + 1$ elemenata, također dobar.

Primijetimo da je, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\frac{(a + a_i) + a}{(a + a_i) - a} = \frac{2a + a_i}{a_i} = 2\frac{a}{a_i} + 1,$$

što je prirodan broj jer je broj a po svojoj definiciji djeljiv s a_i.

Također je, za sve $1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$\frac{(a + a_j) + (a + a_i)}{(a + a_j) - (a + a_i)} = \frac{2a + (a_j + a_i)}{a_j - a_i} = 2\frac{a}{a_j - a_i} + \frac{a_j + a_i}{a_j - a_i},$$

što je opet prirodan broj.